ARITMETICA

DI

BEZOUT

TRADOTTA DAL FRANCESE

DAL

SIG. GIUSEPPE DE SANGRO

PROFESSORE DI MATEMATICA DEL COLLEGIO MILITARE DI MARINA, D'ORDINE DEL GOVERNO, PER USO DEL DETTO COLLEGIO.

NAPOLI

DALL' IMPRIMERIA DI RAFFAELE RAIMONDI.

1813.

PREFAZIONE.

Il corso di Matematica, di cui ora ne diamo la prima parte, deve riunire le conoscenze elementari, che il Signor Duca di Choiseul ha giudicato necessarie per le guardie della Bandiera, e della Marina, prima di ammetterle al grado di Uffiziali di Vascello.

Per quanto utile sia l'istruire di buon'ora questi giovani Gentil' uomini nella pratica d'un arte tanto estesa quanto la Navigazione, non si può dubitare però che la conoscenza preliminare de' principii, su de' quali poggiano le regole dell'arte, non debbano molto contribuire a render fruttuose le lezioni, che essi riceveranno in seguito dall'esperienza, nè li disponga ad essere più attenti, e perciò ad accelerare di molto i loro progressi.

D'altronde, egli è sì raro, che uno spirito avvezzo ad obbedire servilmente alle sole regole della pratica, si ripieghi su di se stesso, per ritornare con successo allo studio delle teorie, che non possa troppo presto disporli a profittare de' vantaggi, che possono ricavare da queste.

Quasi tutti li metodi di navigazione pratica sono fondati sulle conoscenze matematiche: come si potrebbe mai differire d'istruire ne' principj di queste scienze quelli, che sono destinati a dirigerne un giorno l'applicazione?

Per uniformarmi, per quanto era in mio potere, alle vedute del Ministro, il quale si è compiaciuto affidarmi l'esame degli studii delle Guardie della Bandiera, e della Marina, non che la formazione d'un corso di matematica per loro uso, io ho creduto dover attaccarmi a conciliare questi due punti, la necessità d'istruire gli allievi sulle conoscenze matematiche relative al loro oggetto, e quella d'istruirli in un intervallo di tempo, che non faccia loro perder niente di quel vantaggio, che debbono ritrarre, andando di buon'ora a mare.

Per soddisfare a questi due oggetti, io mi sono proposto: 1. di limitare il corso degli studj di obbligazione alle proposizioni direttamente utili alla Navigazione, ed a quelle che sarebbero indispensabili per l'intelligenza di questa. 2. Di facilitare questo studio, con renderlo più interessante colle frequenti applicazio-

mi alla pratica, prese principalmente nella Marina; ciò che unisce ancora il vantaggio di disporre lo spirito de' principianti a comprendere di buon'ora i legami, che uniscono la teoria alla pratica.

Ma nella veduta di concorrere, per quanto mi è possibile, a i progressi di un' arte tanto importante, io ho creduto di non dover perder di vista quelli tra li giovani Gentil' uomini, li quali accoppiando ad una nobile emulazione, delle disposizioni più marcate dagli altri, nutrirebbero il desiderio d' istruirsi con maggior perfezione. E' sotto questo punto di veduta, che avrò cura di spargere in questo Corso delle conoscenze più estese, e specialmente quelle, le quali possano facilitare l' intelligenza delle opere del fu Signor Bouguer, e di alcune altre opere non meno utili alla Marina, da cui non si è per anche ricavato quasi tutto il frutto, che si poteva sperare; poichè gli studj delle Guardie non erano così ben diretti, come si propone ora di fare.

Queste conoscenze, le quali sono cosa lodevole di acquistare, e cui le Guardie della Bandiera, e della Marina vi si debbono con pre-

mura applicare, non sono di pura obbligazione, ed avremo cura di distinguerle con un carattere, il quale sarà da noi indicato.

Il corso di matematica di cui si tratta sarà diviso in quattro parti.

La prima tratta dell' Aritmetica.

La seconda tratterà della Geometria, nella quale si comprenderà la Trigonometria rettilinea, e la Trigonometria Sferica.

La terza avrà per oggetto l'Algebra, e l'applicazione dell' Algebra alla Geometria.

La quarta comprenderà la Statica, e la Dinamica, con alcune proposizioni d' Idrostatica, e d'Idraulica.

Noi abbiamo preferito di far succedere l'Algebra alla Geometria piuttosto, che all' Aritmetica; perchè oltre che l' Algebra ci è stata di un' utilità molto mediocre nella Geometria elementare, li principianti non sono d'altronde ancora assai esercitati ne' ragionamenti matematici, per comprendere la forza delle dimostrazioni algebriche, quantunque queste siano sovente più semplici delle dimostrazioni sintetiche, in vece che nella disposizione, che noi abbiamo scelta, è da credere, che li principianti già fortificati nello studio delle due pri-

me parti, avranno molta facilità a generalizzare le loro idee, e capiranno meglio gli usi numerosi, che si possono fare di questa scienza. Inoltre avendo già acquistato più conoscenze, essi saranno più a portata di familiarizzarsi con questa scienza, con un più gran numero di oggetti, a i quali potranno applicarsi.

Noi non entreremo quì in alcun dettaglio su l'esecuzione delle tre ultime parti del corso; noi ci limiteremo a render conto di questa. Essa racchiude in un piccolo volume quanto è necessario di sapere non solamente per applicare le conoscenze matematiche, le quali insigneremo in seguito; ma ancora per soddisfare a diversi altri usi. Esponendone li metodi, noi abbiamo evitato di moltiplicarli per un medesimo oggetto; poichè non si può abbastanza vigilare con accuratezza a non dividere l'attenzione de' principianti: è un abuso il dire in favore dell'opinione contraria, ch'egli è utile di ravvisare un oggetto sotto differenti aspetti: ciò è vero, quando si ha un certo numero di conoscenze. Per questo medesimo principio noi abbiamo creduto dover restringere li ragionamenti, e li discorsi

in molti luoghi. Li principianti poco o niente fatti per ragionare metodicamente, perdono, percorrendo un lungo treno di Logica, la forza della mente, che è loro necessaria per capire lo spirito di una dimostrazione.

Si è dunque fatto in modo, che si è dato a i ragionamenti, l'estensione necessaria per esser ben compresi, e si sono proscritte quelle scrupulose avvertenze, le quali arrivano sino a dimostrare gli assiomi, e che a forza di supporre il Lettore inetto, conducono in fine a renderlo tale.

Io ho procurato di spianare la strada, sia semplificando li ragionamenti di già impiegati, sia sostituendo loro de' nuovi, li quali mi sono paruti più chiari, ma infine impiegando un linguaggio familiare e semplice. Tocca al Pubblico di giudicare se io vi sia riuscito; ma bisogna che il lettore vi presti un certo grado di attenzione: non si farà mai un libro di matematica, il quale possa leggersi come un libro di storia.

Io suppongo che il lettore conosca li nomi de' numeri, ed alcune altre idee familiari, sulle quali stabilisco li principii della nume-

razione sì de' numeri interi, che de' decimali. Passo alle quattro operazioni fondamentali, di cui ne do il processo, e ne spiego la natura, e li principii di maniera e facilitarne l'applicazione alle operazioni le più composte, che ne dipendono. Dopo di queste operazioni ne indico alcuni usi. Le frazioni sono trattate quasi della stessa maniera.

Li numeri complessi, il di cui calcolo suppone a rigore, la conoscenza delle frazioni, succede a questo. Quantunque io non abbia parlato della *misura in tese*, le regole che ho stabilite, la contengono; ma la conoscenza della natura delle unità de' fattori, e del prodotto appartenendo alla Geometria, ho differito per questa ragione di parlarne.

Quantunque io non disapprovi, che s'improntino da una scienza le nozioni, le quali possano facilitare quella, che si tratta, qualunque subordinazione si abbia d'altronde costume di mettere tra due scienze; nondimeno io penso, che non si debba prendere questo partito, che quanto non ve ne siano più semplici. Come l' Aritmetica mi è paruto, che fornisca delle risorse sufficienti per la spiega delle

operazioni della radice quadrata, e cuba, io mi son servito di essa per farla.

Quello, che espongo sulle ragioni, proporzioni, e progressioni, quantunque breve, mi pare racchiudere quanto basta per le tre parti, che debbono seguire. Intanto, come non possiamo, senza allontanarci dalla legge, la quale ci siamo imposta, ritornare su di qualche proprietà delle progressioni, le quali si potranno da taluni lettori desiderare, noi avvertiamo, che le abbiamo riserbate per applicazione dell' algebra.

Li logaritmi sono d' un grande uso nella pratica della Navigazione, per cui non abbiamo potuto occuparcene specialmente; così dopo di aver esposto la natura, la formazione, e quelli usi di questi numeri, che noi potevamo esporre senza anticipare sopra di alcun' altra scienza, abbiamo dato il mezzo di estendere nel bisogno li soccorsi, che si possono ricavare dalle tavole ordinarie.

Quantunque si possa fare un gran numero di applicazioni alla Navigazione, non è però nell' Aritmetica il loro luogo, perchè esse suppongono quasi tutte almeno la Geometria.

Nondimeno nel numero delle applicazioni, che noi abbiamo date, si sono presi alcuni esempii nel mestiere medesimo. A misura che noi avanzeremo, esse diverranno e più numerose, e più importanti: se ne troveranno inoltre in gran numero nel *trattato di Navigazione*, il quale forma il seguito di questo corso.

ELEMÈNTI DI ARITMETICA

Nozioni preliminari sulla natura, e le differenti specie di numeri.

1. Si chiama in generale *quantità* tuttociò, che è suscettibile di aumento, o diminuzione. L'estensione, la durata il peso ec., sono quantità. La quantità forma l' oggetto delle Matematiche: ma l' Aritmetica, che fa parte di queste scienze, considera le quantità, in quantocchè queste sono espresse da' numeri.

2. L' Aritmetica è dunque la scienza de'numeri: ella ne considera la natura, e le proprietà; ed il suo scopo è di dare delle regole facili, tanto per esprimere li numeri, che per comporli, e decomporli, ciocchè dicesi *calcolare*.

3. Per farsi un' idea esatta de' numeri, bisogna prima sapere che s' intende per *unità*.

4. L'unità è una quantità, che si prende (il più sovente arbitrariamente) per servire di termine di comparazione a tutte le quantità di una medesima specie : così, allorchè si dice un tal corpo pesa *cinque libbre*, la libbra è l' unità, ed è la quantità, alla quale si paragona il peso di questo corpo; si avrebbe potuto ugualmente prendere l' oncia per unità, ed allora il peso di questo corpo sarebbe stato marcato da ottanta.

5. Il numero esprime di quante unità, o parti di unità una quantità è composta. Se la quantità è composta di unità intere, il numero che l' esprime si chiama *numero intero*: se ella è composta di unità intere, e di parti dell' unità, o semplicemente di parti dell'unità, allora il numero si dirà *frazionario* o *frazione* : *tre e mezzo* fanno un numero frazionario : *tre quarti* fanno una frazione.

6. Un numero che si enuncia senza disegnare la specie delle unità, come quando si dice semplicemente *tre* o *tre volte*, *quattro* o *quattro volte*; si chiama *numero astratto*; e allorchè si enuncia nello stesso tempo la specie delle unità, come quando si dice *quattro*

libbre, *cento tonnellate*, si chiama *numero concreto*.

Noi definiremo le altre specie de' numeri a misura che se ne tratterà.

Della numerazione, e de' decimali.

7. La numerazione è l'arte di esprimere i numeri con una quantità limitata di nomi, e di caratteri. Questi caratteri si chiamano *cifre*.

Noi ci dispenseremo di dare quì li nomi de' numeri; questi sono noti a tutti.

In quanto alla maniera di rappresentare li numeri colle cifre, molte ragioni c' impegnano ad esporne li principj.

8. Li caratteri di cui si fa uso nella numerazione attuale, e i nomi de' numeri che questi rappresentano, sono tali come si vedono quì

0	1	2	3	4	5	6	7	8
zero	uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto

9
nove

Per esprimere tutti gli altri numeri con questi caratteri, si è convenuto che di dieci unità se ne formerebbe una sola, alla quale

si darebbe il nome di *decina*, e che si computerebbe per decine, come si computa per unità, cioè a dire, che si computerebbero due decine, tre decine e sino a nove: che per rappresentare queste nuove unità, s'impiegherebbero le stesse cifre che per le unità semplici; ma che si distinguerebbero pel luogo, che loro si farebbe occupare, ponendole a sinistra nelle unità semplici.

Così, per rappresentare *cinquanta quattro*, che contiene cinque decine e quattro unità, si è convenuto di scrivere 54. Per rappresentare *sessanta*, che contiene un numero esatto di decine, e niuna unità, si scrive 60, mettendo un zero, indica che non vi sono unità semplici, e determina la cifra 6 a marcare un numero di decine. Si può con questo mezzo contare sino a *novantanove* inclusivamente.

9. Osserviamo di passaggio questa proprietà della numerazione attuale; cioè, che una cifra situata alla sinistra d'un'altra, o seguita da un zero rappresenta un numero dieci volte più grande che s'esso fosse solo.

10. Dopo 99, si può contare sino a *novecentonovantanove*, per una simile convenzione. Di dieci decine si comporrà una sola

unità, che si chiamerà *centinajo*, perchè dieci volte dieci fanno cento; si conterranno queste centinaja da uno sino a nove, e si rappresenteranno colle stesse cifre, ma situando queste cifre alla sinistra delle decine.

Così, per marcare *ottocento - cinquantanove*, che contengono otto centinaja, cinque decine; e nove unità, si scriverà 859. Se si avessero *ottocento*, *e nove*, che contengono otto centinaja, niuna decina, e nove unità, si scriverebbe 809; cioè a dire, che si metterebbe un zero per marcare il luogo delle decine che mancano. Se le unità mancassero parimenti, si porrebbero due zeri; così per esprimere *ottocento*, si scriverebbe 800.

11. Osserviamo ancora, che in virtù di questa convenzione, una cifra seguita da due altre o da due zeri, marca un numero cento volte più grande che s'esso fosse solo.

12. Dopo *novecento - novantanove*, si può contare collo stesso artifizio sino a *novemila-novecento - novantanove*, formando di dieci centinaja una unità, che si chiama *mille*, perchè dieci volte cento fa mille, contando queste unità come sopra, e rappresentandole colle stesse cifre situate alla sinistra delle centinaja.

Così, per esprimere *settemila - ottocento-cinquantanove*, si scriverà 7859; per marcare *settemila e nove*, si scriverà 7009; e per *settemila*, si scriverà 7000; donde si vede che una cifra seguita da tre altre, o da tre zeri marca un numero mille volte più grande che se esso fosse solo.

13. Continuando così di racchiudere dieci unità d'un certo ordine in una sola unità, e di situare queste nuove unità in luoghi di più in più avanzati verso la sinistra, si perviene ad esprimere d'una maniera uniforme, e co' dieci caratteri solamente, tutti li numeri interi immaginabili.

14. Per enunciare facilmente un numero espresso con quante cifre si vogliono, si dividerà col pensiero in classi di tre cifre ciascuna, andando da dritta a sinistra: si daranno a ciascuna classe li nomi seguenti, cominciando dalla dritta, *unità*, *mille*, *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, *quadrilioni*, *quintilioni*, *sestilioni ec.* La prima cifra di ciascuna classe (cominciando sempre dalla dritta) avrà il nome della classe, la seconda quello di decina, e la terza quello di centinajo.

Così, partendo dalla sinistra, si enuncierà ciascuna classe come se fosse sola, e si pro-

nunzierà alla fine di ciascuna il nome di questa medesima classe: per esempio, per proferire il numero seguente:

quadrilioni, trilioni, bilioni, milioni, mille, unità:

23, 456, 789, 234, 565, 456

si dirà ventitrè *quadrilioni*, quattrocento-cinquantasei *trilioni*, settecento-ottantanove *bilioni*, duecento-trentaquattro *milioni*, cinquecento-sessantacinque *mila*, quattrocento-cinquantasei-unità.

15. Dalla numerazione che abbiamo esposta, e che è di pura convenzione, ne risulta che a misura che si progredisce da dritta a sinistra, le unità di cui ciascun numero e composto, sono di dieci in dieci volte più grandi, e che per conseguenza per rendere un numero dieci volte, cento volte, mille volte più grande, basta mettere appresso alla cifra delle sue unità uno, due, tre zeri: al contrario, a misura che si ritrocede da sinistra a dritta, le unità sono di dieci in dieci volte più piccole.

16. Tale è la numerazione attuale: ella è la base di tutte le altre maniere di numerare, quantunque in molte arti non si segua per necessità sempre a contare unicamente per decine per decine di decine ec.

17. Per valutare le quantità più piccole dell'unità, che si è scelta, si divide questa in altre unità più piccole. Il numero n' è indifferente in se stesso, perchè possa misurare le quantità, che si ha in mente di misurare: ma ciò che si dee avere principalmente in veduta in queste sorte di divisioni si è di rendere li calcoli li più facili che sarà possibile: per questa ragione, in vece di dividere da principio l'unità in un gran numero di parti, affin di poterne valutare le più piccole, si divide in un certo numero di parti, che si suddivino in altre, e queste nuove in altre ancora più piccole. Per tal ragione nelle monete si divide la lira in 20 parti, che si chiamano *soldi*, il soldo in 12 parti, che si chiamano *denari*. Parimenti nella misura de' pesi, si divide la libbra in 2 *marche*, il marco in 8 *once*, l'oncia in 8 *grossi* ec., di sortacchè nel primo caso si conta per ventine e per dozzine, nel secondo per dozzine, e per ottine ec.

18. Un numero che è composto di parti rapportate così a differenti unità, è ciò che chiamasi numero *complesso*, e per l'opposto quello che non racchiude che una sola specie di unità, si chiama numero incomplesso. 8 tt

$17^s\ 8^d$ o 8 lire 17 soldi, ed 8 denari, sono un numero complesso.

19. Ogni arte suddivide a suo modo l'unità principale, che ella ha scelta. Le suddivisioni della tesa sono differenti da quelle della lira: quelle della lira differenti da quelle del giorno, dell'ora; queste differenti da quelle del marco, e così di seguito. Noi le faremo conoscere, allorchè tratteremo de' numeri complessi.

20. Ma di tutte le divisioni, e suddivisioni che si possono fare dell' unità, quelle che si fanno per decimali, cioè a dire dividendo l' unità in parti di dieci in dieci volte più piccole, è senza dubbio la più comoda ne' calcoli. Ella è molto in uso nella prattica delle matematiche; la formazione ed il calcolo de' decimali sono assolutamente lo stesso che per li numeri ordinarj o interi: noi li faremo ora conoscere.

21. Per valutare in decimali le parti più piccole dell' unità, si concepisce che questa unità tale, ch' ella sia libbre, tese ec., sia composta di 10 parti, come s' immagina la decina composta di dieci unità semplici, o come s'immagina la lira composta di 20 soldi. Queste nuove unità, per opposizione alle de-

cine, sono chiamate *decime*, si rappresentano colle stesse cifre che le unità semplici; e siccome queste sono dieci volte più piccole di quelle, si situano alla dritta della cifra, che rappresenta le unità semplici.

Ma per prevenire l' equivoco, e non dar luogo a prendere queste decime per unità semplici, si è convenuto nello stesso tempo di fissare una volta per tutte il luogo delle unità, con una caratteristica particolare; quella che è più in uso, è una virgola, che si mette a dritta della cifra che rappresenta le unità, o che torna lo stesso, tra le unità e le *decime*; così per marcare *ventiquattro unità*, *e tre decime*, si scriverà 24, 3.

22. Si possono del pari riguardare attualmente le *decime* come delle unità, che sono state formate da dieci altre, ciascuna dieci volte più piccola delle *decime*, e per la stessa ragione di analogia situarle alla dritta delle *decime*. Queste nuove unità dieci volte più piccole delle *decime*, saranno cento volte più piccole delle unità principali, e per questa ragione si chiameranno *centesime*. Così per marcare *ventiquattro unità*, *tre decimi*, *e cinque centesimi*, si scriverà 24, 35.

23. Concepiamo similmente le *centesime* co-

me formate di dieci parti; queste parti saranno mille volte più piccole delle unità principali, e per questa ragione saranno chiamate *millesime*; e come dieci volte più piccole delle centesime, si situeranno alla dritta di queste.

Continuando a suddividere così di dieci in dieci, si faranno delle nuove unità, che si chiameranno successivamente *diecimillesime*, *centomillesime*, *milionesime*, *diecimilionesime*, *centomilionesime*, *bilionesime* ec., e che si situeranno in luoghi di più in più lontani sulla dritta della virgola.

24. Le parti dell' unità, che abbiamo poc' anzi descritte, si chiamano *decimali*.

25. In quanto alla maniera di enunciarli, ella è la stessa degli altri numeri. Dopo di aver enunciate le cifre che sono alla sinistra della virgola, si enunciano li decimali della stessa maniera; ma si aggiunge alla fine il numero delle unità decimali dell' ultima specie; così per pronunziare questo numero 34,572, si direbbe trentaquattro unità, e cinquecentosettantadue *millesime*; se fossero delle tese per esempio, si direbbe trentaquattro tese, e cinquecentosettantadue *millesime* di tesa.

La ragione è facile a concepirla, se si rifleta che nel numero 34, 572 la cifra 5 può

indifferentemente esprimere o cinque *decime*, o *cinquecento millesime*, poichè un *decimo* (22) valendo 10 centesimi, ed il *centesimo* (23) valendo 10 *millesimi*, il *decimo* conterrà dieci volte dieci *millesimi*, o 100 millesimi; come li cinque decimi vagliono 500 *millesimi*. Per simile ragione, la cifra 7 potrà pronunziarsi dicendo settanta *millesimi*; perchè (23) ciascun *centesimo* vale 10 *millesimi*.

26. Riguardo alla specie delle unità dell' ultima cifra, si troverà sempre con facilità contando successivamente da sinistra a dritta su di ciascuna cifra dopo la virgola li nomi seguenti . . . . *decime*, *centesime*, *millesime*, *diecimillesime* ec.

27. Se non vi fussero affatto unità intere, ma solamente delle parti dell' unità si metterebbe un zero per conservare il luogo delle unità; così per esprimere 125 *millesimi*, si scriverebbe, 125. Se si volesse esprimere 25 *millesimi*, si scriverebbe o, o25 mettendo un zero tra la virgola e le altre cifre, tanto per dinotare che non vi sono *decine*, che per dare alle parti seguenti il loro vero valore. Per la stessa ragione, per esprimere 6 *dieci-millesime*, si scriverebbe o, ooo6.

28. Esaminiamo ora li cangiamenti che pos-

sono farsi in un numero, allorchè si muti il sito della virgola.

Poichè la virgola determina il luogo delle unità, e che tutte le altre cifre hanno de' valori dipendenti dalle loro distanze da questa stessa virgola; se si avanza la virgola di uno, due, tre ec. luoghi sulla sinistra, si renderà il numero 10, 100, 1000 ec. volte minore; al contrario si renderà 10, 100, 1000 volte più grande, se si rinculerà la virgola di uno, due tre luoghi sulla dritta.

In effetto, se si abbia 4327, 5264; e che avvanzando la virgola d'un luogo sulla sinistra, si scriva 432, 752 64; egli è chiaro che le migliaja del primo numero esprimono delle centinaja nel nuovo; le centinaja sono delle decine; le decine sono delle unità; le unità delle decime, le decime delle centesime, e così di seguito. Dunque ciascuna parte del primo numero è divenuta dieci volte più piccola per questo cambiamento di sito. Se al contrario, tirando in dietro la virgola di un luogo sulla dritta, si fusse scritto 43275, 264, le migliaja del primo numero si troverebbero cambiate in decine di migliaja, le cintinaja in migliaja le decine in centinaja, le unità in decine, le decime in unità, e così di seguito.

Dunque il nuovo numero è 10 volte più grande del primo.

29. Un simile ragionamento fa vedere, che avanzando la virgola sulla sinistra di due, o tre luoghi, si renderebbe il numero 100, o 1000 volte micore; ed al contrario 100, o 1000 volte maggiore, retrocedendo la virgola di due, o tre luoghi sulla dritta.

30. L'ultima osservazione che noi faremo su i decimali è che non se ne cangia il valore ponendosi apprcsso dell'ultima cifra decimale qualunque numero di zeri. Così 43, 25 è lo stesso che 43, 250, o che 43, 25000, o che 43, 25000 ec.

Poichè ciascuna *centesima* valendo 10 *millesimi*, o 100 *dieci-millesimi*, 25 *centesimi* varranno 250 *millesimi*, o 2500 *dieci-millesimi* ec., in una parola, è la stessa cosa che in vece di dire 25 doppie, si dicesse 250 lire, o che in vece di dire 25 quintali, si dicesse 2500 libbre.

Delle operazioni dell' Aritmetica.

31. Sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere, sono le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica. Tutte le quistioni,

che si possono proporre su i numeri si riducono a praticare alcune di queste operazioni. Egli è dunque importante di rendersele familiari, e di conoscerne bene lo spirito.

32. Lo scopo dell'Aritmetica è, siccome l'abbiamo già detto, di dare de' mezzi di calcolare facilmente li numeri. Questi mezzi consistono a ridurre il calcolo de' numeri li più composti a quello de' numeri più semplici, o espressi dal minimo numero di cifre possibile. Ecco ciò che si tratta di esporre al presente.

Dell' Addizione de' numeri interi, e delle parti decimali.

33. Esprimere il valore totale di più numeri con un solo, è ciò che dicesi *fare un' addizione*.

Quando li numeri che si propongono a sommare non hanno che una sola cifra, non si ha bisogno di regola; ma allorchè contengono molte cifre, si trova il loro valore totale, che si chiama *somma*, osservando la regola seguente.

Scrivete gli uni sotto degli altri tutti li numeri proposti, di modocchè le cifre delle u-

nità di ciascuno siano in una medesima colonna verticale; si faccia lo stesso per le decine, per le centinaja ec., tiratevi sotto una linea orizzontale.

Sommate dapprima tutti li numeri che sono nella colonna delle unità; se la somma non oltrepassa il 9, scrivetela al di sotto; se ella passa il nove, conterrà delle decine; scrivete al di sotto l'eccesso del numero sulle decine: contate queste decine come altretante unità, ed aggiungetele a i numeri della colonna seguente: praticate rispetto alla somma de' numeri di questa seconda colonna la medesima regola usata per la prima, e continuate così di colonna in colonna sino all' ultima, sotto della quale voi scriverete la somma come la troverete. Rischiariamo questa regola con degli esempj.

ESEMPIO I.

Si tratta di sommare 54925 con 2023: io scrivo questi due numeri come siegue

54925	
2023	
56948	somma

E dopo di aver tirata sotto la linea, io comincio dalle unità, dicendo 5, e 3 fanno 8, che scrivo sotto di questa stessa colonna.

Io passo a quella delle decine, in cui dico 2 e 2 fanno 4, che scrivo sotto.

Alla colonna delle centinaja io dico 9 e 0 fanno 9, che scrivo sotto di questa medesima colonna.

Nella colonna delle migliaja io dico 4 e 2 fanno 6, che io scrivo sotto di qnesta colonna.

Finalmente nella colonna delle decine di migliaja io dico 5 e niente fanno 5, che io scrivo anche al di sotto.

Il numero 56948, trovato con questa operazione, è la somma de'due numeri proposti,

poich' esso ne contiene le unità, le decine, le co inaja, le migliaja, e le decine di migliaja, che noi abbiamo riunite successivamente.

ESEMPIO II.

Si dimanda la somma de' quattro numeri seguenti . . . 6903; 7854; 953; 7327; io li scrivo come segue

```
 6903
 7854
  953
 7327
 -----
23037   somma
```

E cominciando come quì sopra dalla dritta, io dico 3 e 4 fanno 7, e 3 fanno 10, e 7 fanno 17; io scrivo le 7 unità sotto la prima colonna; ritengo la decina per unirla, come unità, a i numeri della colonna seguente, che sono anche delle decine.

Passando alla seconda colonna; io dico 1, che io ritengo, e o fanno 1, e 5 fanno 6, e 5 fanno 11, e 2 fanno 13; io scrivo 3 sotto la presente colonna, e ritengo per la de-

cina una unità, che aggiungo alla colonna seguente, dicendo uno e 9 fan 10, e 8 fanno 18, e 9 fanno 27, e 3 fanno 30; io pongo 0 sotto di questa colonna; e ritengo per le tre decine tre unità; che aggiungo alla colonna seguente, dicendo similmente 3 e 6 fanno 9, e 7 fanno 15, e 7 fanno 23; io scrivo 3 sotto di questa colonna; e come non vi sono più colonne, avanzo di un luogo le due decine; che apparterrebbero alla colonna seguente, se ve ne fusse una.

Il numero 23037 è la somma de' quattro numeri proposti.

34. Se v' ha delle parti decimali; siccome esse si computano come gli altri numeri per decine; a misura che si avanza da dritta a sinistra, la regola per sommarle è del tutto la stessa, avvertendo di mettere sempre le unità dello stesso ordine in una stessa colonna.

Così, se si propongono a sommare li tre numeri.

72, 597   12, 8   124, 03,

io scriverò

72, 957	
12, 8	
124, 03	
209, 777	somma

Seguendo la regola qui sopra esposta, io avrò 209, 787 per la somma.

Della sottrazione de' numeri interi, e delle parti decimali.

35. La sottrazione è quell' operazione per cui si toglie un numero da un altro numero Il risultato di questa operazione si chiama *resto*, o *eccesso*, o *differenza*.

Per eseguire questa operazione, si scriverà il numero che si vuol togliere sotto dell'altro, nell'istesso modo che nell'addizione; ed avendo tirata sotto la linea, si toglierà, andando da dritta a sinistra, ciascun numero inferiore dal suo corrispondente superiore; vale a dire le unità dalle unità, le decine dalle decine ec.; si scriverà ciascun residuo al di sotto nello stesso ordine, e zero allorchè non rimarrà niente.

Quando una cifra inferiore si troverà più grande della cifra superiore corrispondente, si aggiungeranno a questa dieci unità, che si avranno, improntando col pensiero un' unità dalla sua vicina a sinistra, la quale deve, per questa ragione, essere riguardata come minore di un' unità nell' operazione seguente.

ESEMPIO I.

Si propone di sottrarre 5432 da 8954.
Io scrivo questi due numeri come segue

8954	
5432	
3522	residuo

E cominciando dalla cifra delle unità, io dico 2 tolto da 4, resta 2, che scrivo sotto: indi passando alle decine, io dico 3 tolto da 5 resta 2, che io scrivo sotto le decine. Alla terza colonna io dico 4 tolto da 9, resta 5, che scrivo sotto di questa colonna. Finalmente alla quarta io dico 5 tolto da 8, resta 3, che scrivo sotto del 5, ed ho 3522 per lo residuo di 5432 sottratto da 8954.

ESEMPIO II.

Si vuol togliere 7987 da 27646.
Si scriverà 27646
7987

19659 residuo

Siccome non si può togliere 7 da 6, si aggiungeranno a 6 dieci unità, che s' impronteranno, prendendo un' unità dal suo vicino 4, e si dirà 7 tolto da 16, resta 9, che si scriverà sotto del 7.

Passando alle decine, non si dirà più 8 tolto da 4, ma 8 tolto da 3 solamente, perchè per l' impronto chè si è fatto, si è diminuito il 4 d' un' unità. Siccome non si può togliere 8 da 3, si aggiungeranno parimente a 3 dieci unità, che s' impronteranno prendendo un' unità sulle cifra 6 a sinistra, e si dirà 8 tolto da 13, resta 5, che si scriverà sotto di 8. Passando alla terza colonna, si dirà anche 9 tolto da cinque, o piuttosto 9 tolto da 15 (improntando come quì sopra), resta 6, che si scriverà sotto al 9 passando alla quarta colonna si dirà

per la stessa ragione, 7 tolto da 6, o piuttosto da 16, resta 9, che si scriverà sotto di 7; e siccome non vi ha niente da togliere nella quinta colonna, si scriverà sotto di questa colonna non già 2, perchè si è improntata un' unità da questo 2, ma solamente 1, e si avrà 19659 per residuo.

36. Se la cifra, dalla quale deve farsi l' impronto fosse un zero, l' impronto si farebbe non già su questo zero, ma sulla prima cifra significativa, che verrebbe appresso.

Or quantunque ciò sia allora improntare 100, o 1000, o 10000, secondocchè v' ha uno, due, o tre zeri consecutivi, non si opererà diversamente da quì sopra; vale a dire che si aggiungerà solamente 10 alla cifra, per la quale s' impronta, e come questi dieci sono stimati presi su i 100, o 1000, e, che si sono improntati, per impiegare li 90, o 990, che restano, si conteranno li zeri seguenti per altrettanti nove; ciocchè l' esempio seguente metterà in chiaro.

ESEMPIO III.

Se da	20064
Si vuol togliere	17489
	2575 residuo

Si dirà prima 9 tolto da 4, o piuttosto da 14 (improntando sulla cifra seguente), resta 5. Indi per togliere 8 da 5, siccome ciò non si può, e che non è possibile improntare sulla cifra seguente, che è un zero, s'impronterà sopra il 2 un' unità, la quale vale mille rispetto alla cifra, sulla quale si opera. Di questo mille non si prenderanno che 10 unità, che si aggiungeranno al 5, e si dirà 8 tolto da 15, retta 7.

Siccome non si sono impiegate che 10 unità delle mille, che si sono improntate, s'impiegheranno le 990 restanti per sottrarre li numeri che rispondono sotto de' zeri; vale a dire che ciascun zero sarà contato come un 9: così si dirà 4 tolto da 9, resta 5; indi 7 tolto da 9, resta 2, ed infine 1 tolto da 1, non resta niente.

37. Se vi sono delle parti decimali ne' nu-

meri, su i quali si vuole operare, si seguirà affatto la medesima regola; ma per evitare qualunque imbarazzo nell' applicazione di questa regola, si dovranno ridurre all' istesso numero di cifre decimali li due numeri proposti, ponendo un sufficiente numero di zeri appresso a quello, che ha minor numero di caratteri decimali: questa preparazione non cambia per niente il valore di questo numero.

ESEMPIO IV.

Da 5403, 25
Si vuol togliere 585, 6532

Io metto due zeri appresso a i decimali del numero superiore; dopo di che opero su i due numeri così preparati precisamente secondo la regola data per li numeri interi

5403, 2500
385, 6532

5017, 5968 residuo
ed io trovo per residuo 5017, 5968

Della pruova dell' Addizione, e della Sottrazione.

38. La pruova d' un' operazione aritmetica è un' altra operazione, che si fa per assicurarsi dell' esattezza del risultato della prima.

La pruova dell' addizione si fa sommando di nuovo per parti, ma cominciando dalla sinistra, le somme che si sono già unite. Si toglie l' intera prima colonna dalla parte, che le corrisponde uella somma inferiore; si scrive sotto il resto, che si riduce col pensiero in decine, per unirlo alla cifra segueute di questa stessa somma, e dal totale si toglie ancora l' intera colonna superiore. Si continua così sino all' ultima colonna, la di cui somma essendo sottratta, non deve lasciare alcun residuo.

Così, avendo trovato quì sopra che li quattro numeri 6903
7854
953
7327

hanno per somma 23037.

Per verificare questo risultato, io sommo

li medesimi numeri cominciando dalla sinistra ; e dico 6 e 7 fanno 13 , e 7 fanno 20, li quali tolti da 23 , rimangono 3 o 3 decine, che colla cifra seguente zero , fanno 30. Io passo alla seconda colonna , e dico 9 e 8 fanno 17, e 9 fanno 26 , e 3 fanno 29, che tolgo da 30 ; rimane 1 o una decina , la quale unità alla cifra seguente 3 , fa 13. Sommo tutti li numeri della terza colonna dicendo 5 e 5 fanno 10 , e 2 fanno 12, li quali tolti da 13, resta 1, o una decina , la quale unita alla cifra seguente 7 fa 17 ; sommo similmente tutti li numeri dell' ultima colonna dicendo 3 e 4 fanno 7, e 3 fanno 10, e 7 fan 17, che sottratto da 17 non rimane niente . Donde io conchiudo che la prima operazione è esatta .

Si può conchiudere che la prima operazione è stata ben fatta , allorchè , dopo questa pruova , non rimane niente ; perchè avendo tolto successivamente tutte le migliaja , tutte le centinaja, tutte le decine, e tutte le unità, di cui si era composta la somma, fa d'uopo in fine che non resti niente.

39. La pruova della sottrazione si fa sommando il residuo trovato coll' operazione col numero sottratto : se la prima operazione è

stata ben fatta, si dovrà riprodurre il numero, da cui si è fatta la sottrazione. Così io veggo che nel terzo esempio, che abbiamo dato quì sopra; l'operazione è stata ben fatta, perchè sommando 17489 (numero sottratto) col residuo 2565, io riproduco 20054, numero da cui si era fatta la sottrazione.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ \underline{17489} \\ 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

Della moltiplicazione.

40. Moltiplicare un numero per un altro, è prendere il primo di questi due numeri tante volte, quante sono le unità del secondo: moltiplicare 4 per 3, è prendere tre volte il numero 4.

41. Il numero che si moltiplica, si chiama *moltiplicando*; quello per cui si moltiplica, si chiama *moltiplicatore*; ed il risultato dell' operazione si chiama *prodotto*.

42. La parola *prodotto* ha comunemente

un significato moltopiù esteso; ma qui si avverte espressamente, che noi l'impiegheremo per indicare il risultato della moltiplicazione.

Il moltiplicando, ed il moltiplicatore si chiamano anche *fattori* del prodotto: così 3 e 4 sono li fattori di 12, perchè 3 volte 4 fanno 12.

43. Secondo l'idea che abbiamo data della moltiplicazione, si vede che si potrebbe fare quest'operazione scrivendo il moltiplicando tante volte, quante unità vi sono nel moltiplicatore, e facendo in seguito l'addizione: per esempio, per moltiplicare 7 per 3, si potrebbe scrivere:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

e la somma 21, che risulta da quest'operazione, sarebbe il prodotto.

Ma allorchè il moltiplicando è un poco composto, l'operazione diviene molto lunga. Ciò che noi appelliamo propriamente moltiplicazione, è il metodo di pervenire a questo

medesimo risultato per una via più breve.

44. Finchè si considerano li numeri astrattamente, cioè senza tener conto della natura delle loro unità; importa poco quale de' due numeri proposti per la moltiplicazione si prenda per moltiplicando o per moltiplicatore: per esempio; se si abbia 4 da moltiplicare per 3; egli è indifferente di moltiplicare 4 per 3; o 3 per 4; il prodotto sarà sempre 12: di fatti 3 volte 4 non sono altra cosa che il triplo di 1 volta 4; e 4 volte 3 sono il triplo di 4 volte 1. Or egli è chiaro che 1 volta 4, e 4 volte 1 sono la stessa cosa; e si può applicare lo stesso ragionamento ad ogni altro numero.

45. Ma allorchè per l' enunziazione della quistione, il moltiplicatore, ed il moltiplicando sono numeri concreti, importa distinguere il moltiplicando dal moltiplicatore: quest' attenzione è principalmente necessaria nella moltiplicazione de' numeri complessi, di cui parleremo in appresso.

Del resto, ciò è sempre facile a distinguere: la quistione, che conduce alla moltiplicazione di cui si tratta, fa sempre conoscere qual' è la quantità, che si cerca di ripetere più volte, cioè il moltiplicando; e quale è

quella che indica quante volte si deve ripetere il moltiplicando; cioè qual'è il moltiplicatore.

46. Siccome il moltiplicatore serve per dinotare quante volte si deve prendere il moltiplicando, egli è sempre un numero astratto: così, quando si dimanda ciò che debbono costare 52 tese di legno, a ragione di 36 lire la tesa; si vede che il moltiplicando è 36 lire, che si tratta di ripeterlo 52 volte; sia che questo 52 esprima tese, o qualunque altra cosa.

47. Il prodotto, che si forma dalla ripetuta addizione del moltiplicando, avrà dunque delle unità della stessa natura del moltiplicando (1).

Dopo questa piccola digressione sulla natura delle unità del prodotto, e de' suoi fattori, ritorniamo al metodo di trovare questo prodotto.

(1) *Noi non ne eccettuiamo la moltiplicazione geometrica, di cui parleremo in Geometria, come sembra molto naturale. Le unità del moltiplicator sono delle unità astratte, come in tutte le altre moltiplicazioni.*

48. Le regole della moltiplicazione de' numeri più composti si riducono a moltiplicare un numero di una sola cifra per un numero di una sola cifra. Bisogna dunque esercitarsi a trovare da se medesimo il prodotto de' numeri espressi da una sola cifra, aggiungendo un medesimo numero a se stesso. Si può anche, se si voglia, fare uso della tavola seguente, che si ettribuisce ai Pittagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La prima linea di questa tavola si forma aggiungendo 1 a se stesso successivamente.

La seconda aggiungendo 2 a se stesso.

La terza aggiungendo 3; e così di seguito.

49. Per trovare per mezzo di questa tavola il prodotto di due numeri espressi da una sola cifra ciascuna, si cercherà uno de' due numeri, il moltiplicando, per esempio, nella linea superiore; e partendo da questo numero, si discenderà verticalmente sino a che non si pervenga dirimpetto al moltiplicatore, che si troverà nella prima colonna. Il numero, sul quale si sarà arrestato, sarà il prodotto: così per trovare, per esempio, il prodotto di 9 per 6, o quanto fanno 6 volte 9, io scendo da 9 preso nella prima linea sino a rincontro di 6 preso nella prima colonna; il numero, sul quale mi fermo, è 54; e per conseguenza 6 volte 9 fanno 54.

Ecco quanto basta per passare alla moltiplicazione de' numeri espressi con molte cifre.

Della moltiplicazione per un numero di una sola cifra.

50. Scrivete il moltiplicatore, che si suppone quì di una sola cifra, sotto al moltiplicando, che si suppone di una sola cifra; poco importa sotto qual cifra, ma per fissare le

idee, supponiamo, che sia sotto la cifra delle unità.

Moltiplicate dapprima il numero delle unità pel vostro moltiplicatore, e se il prodotto contiene delle sole unità, scrivete questo prodotto al dì sotto: se esso contiene delle unità, e delle decine, scrivete solamente le unità, e contando le decine per altrettante unità, ritenetele.

Moltiplicate similmente il numero delle decine del moltiplicando, ed al prodotto unite le unità, che avete ritenute: scrivete il tutto al di sotto, se esso può essere espresso con una sola cifra; altrimenti scriverete le unità di questo prodotto, e riterrete le decine, che sono delle centinaja, per unirle al prodotto seguente, che sarà similmente di centinaja.

Continuate a moltiplicare successivamente colla stessa regola tutte le cifre del moltiplicando; la serie delle cifre, che voi avrete scritte, esprimerà il prodotto.

ESEMPIO.

Si dimanda quanti piedi vagliono 2864 tese? La tesa è di 6 piedi.

La quistione si riduce a prendere 6 piedi 2864 volte, o pure a prendere 2864 piedi 6 volte (44).

Io scrivo dunque 2864 moltiplicando
6 moltiplicatore

17184 prodotto

e dico cominciando dalle unità, 6 volte 4 fanno 24; io scrivo 4, e ritengo 2 unità per le due decine.

2. 6 volte 6 fan 36, e due che ho ritenuto fanno 38; io scrivo 8, e ritengo 3.

3. 6 volte 8 fanno 48, e 3 che ho ritenuto fanno 51; io scrivo 1 e ritengo 5.

4. 6 volte 2 fanno 12, e 5, che ho ritenuto fanno 17, che io scrivo per intiero, perchè non vi ha più niente a moltiplicare. Il numero 17184 è il prodotto cercato, o il numero de' piedi, che vagliono le 2864 tese; poich' egli contiene 6 volte le 4 unità, 6 volte le 6 decine, 6 volte le 8 centinaja, e 6

volte le due migliaja; e per conseguenza 6 volte il numero 2864.

Della moltiplicazione per un numero di molte cifre.

51. Allorchè il moltiplicatore ha molte cifre, bisogna fare successivamente con ciascuna di queste cifre ciò, che si è fatto qnando ve n'era una, ma cominciando sempre dalla dritta: così, si moltiplicheranno prima tutte le cifre del moltiplicando per la cifre delle unità del moltiplicatore; indi per quella delle decine; e si scriverà questo secondo prodotto sotto del primo. Ma siccome esso deve rappresentare un numero di decine, perchè per le decine si è moltiplicato, si scriverà la prima cifra di questo prodotto sotto le decine, e le altre cifre sempre avanzando sulla sinistra.

Il terzo prodotto, che si farà moltiplicando per le centinaja, si situerà similmente sotto del secondo; ma avanzando anche di un luogo. Si seguirà la stessa legge per gli altri.

Fatte tutte queste moltiplicazioni, si sommeranno li prodotti particolari ottenuti, e la somma sarà il prodotto totale.

ESEMPIO.

Si proponga a moltiplicare 65487
per 6958

```
     523896
    327435
   589383
  392922
  455658546 prodotto
```

Io moltiplico prima 65487 pel numero 8 delle unità del moltiplicatore, e scrivo successivamente sotto la linea le cifre del prodotto 523 896, che trovo praticando la regola data pel primo caso (50).

Io moltiplico similmente il numero 65487 per la seconda cifra 5 del moltiplicatore, e scrivo il prodotto 327435 sotto del primo prodotto, ma situando la prima cifra 5 sotto le decine di questo primo prodotto.

Moltiplicando dell' istesso modo 65487 per la terza cifra 9, io scrivo il prodotto 589383 sotto del precedente, ma situando la prima

cifra 3 nel luogo delle centinaja, perchè il numero per lo quale ho moltiplicato, è un numero di centinaja.

Finalmente io moltiplico 65487 per l'ultima cifra 6 del moltiplicatore, e scrivo il prodotto 392922 sotto del precedente, avanzando ancora d'un luogo, affinchè la sua prima cifra occupi il luogo delle migliaja, perchè la cifra, per la quale si moltiplica, esprime migliaja. Sommo in fine tutti questi prodotti, ed ho 455658546 per prodotto di 65487 moltiplicato per 6958, cioè pel valore di 65487 preso 6958 volte. Ed infatti si è preso 65487 volte per la prima operazione, 50 volte per la seconda, 900 volte per la terza, e 6000 volte per la quarta.

52. Se il moltiplicando, o il moltiplicatore, o entrambi fossero terminati da zeri, si abbrevierebbe l'operazione, moltiplicando come se non vi fossero i zeri; ma si scriverebbero appresso al prodotto.

ESEMPIO.

Si proponga di moltiplicare 6500
per 350

```
    325
   195
2275000
```

Io moltiplico solamente 65 per 35, e trovo 2275, a lato del quale io scrivo li tre zeri, che si trovano appresso al moltiplicando, e moltiplicatore.

In fatti il moltiplicando 6500 rappresenta 65 centinaja; perciò quando si moltiplica 65, si deve sott' intendere che il prodotto è di centinaja. Similmente il moltiplicatore 350 esprime 35 decine; e perciò quando si moltiplica per 35, si deve sott' intendere che il prodotto conterrà decine: esso sarà dunque di decine di centinaja, cioè di migliaja; dovrà dunque avere tre zeri. Si applicherà un simile ragionamento a tutti gli altri casi.

53. Allorchè si trovano de' zeri tra le cifre del moltiplicatore, siccome la moltiplicazione

per questi zeri non darebber che de' zeri, si potrà tralasciare di scriverlo nel prodotto; e passando subito alla moltiplicazione per la prima cifra significativa, che segue questi zeri, si avanzerà il prodotto sulla sinistra di tanti luoghi più uno, quanti v' ha di zeri nel moltiplicatore, che si succedono, cioè di due luoghi se vi è un zero, di tre se ve ne sono due.

E S E M P I O.

Se si abbia	42052
a moltiplicare per	3006
	25 2312
	12615 6
	12640 8312

Dopo di aver moltiplicato per 6, e scritto il prodotto 252312, si moltiplicherà subito per tre: ma si scriverà il prodotto 126156 in modo ch'esso segni delle migliaja. Bisogna dunque farlo retrocedere di tre luoghi, cioè d' un luogo dippiù che non vi sono zeri intercetti tra le cifre del moltiplicatore.

Della moltiplicazione delle parti decimali.

54. Per moltiplicare le parti decimali, si osserverà la stessa regola de' numeri interi, senza tener conto della virgola; ma dopo di aver trovato il prodotto, si separeranno sulla dritta con una virgola tante cifre, quanti caratteri decimali vi sono nel moltiplicando, e nel moltiplicatore.

E S E M P I O I.

Si proponga di moltiplicare

$$\begin{array}{r} 54,23 \\ 8,3 \\ \hline 16269 \\ 43384 \\ \hline 450,109 \end{array}$$

Io moltiplicherò 5423 per 83, il prodotto sarà 450109; e siccome vi sono due decimali uel moltiplicando, ed uno nel moltipli-

catore, io separerò tre cifre sulla dritta di questo prodotto; che perciò diverrà 450 , 109, come dev' essere.

La ragione di questa regola è facile a comprendersi ; riflettendo che se il moltiplicatore fosse 83 , il prodotto non avrebbe che delle parti *centesime* , poichè si sarebbe ripetuto 83 volte il moltiplicando 54 , 23 , di cui li decimali sono delle centesime . Ma siccome il moltiplicatore è 8 , 3 , cioè (21) dieci volte più piccolo di 83 , il prodotto deve dunque contenere delle unità dieci volte più piccole delle centesime : l' ultima cifra de' suoi decimali deve dunque (23) esprimere *millesimi*; e perciò vi dovrano essere tre cifre decimali in questo prodotto , cioè tante , quante sono nel moltiplicando , e nel moltiplicatore .

Si può applicare un simile ragionamento ad ogni altro caso.

ESEMPIO II.

Se si avesse	0 , 12
a moltiplicare	0 , 3
	0 , 036

Si moltiplicherebbe 12 per 3, cioè che darebbe 36: siccome la regola prescrive di separare tre cifre, sarebbe imbarazzante a sodisfarvi, poichè il prodotto 36 non ne ha che due. Ma se si riprenda il raziocinio che abbiamo applicato a l'esempio precedente, si vedrà facilmente che bisogna, (come si vede quì) interporre un zero tra 36 e la virgola. Infatti se si volesse 0, 12 moltiplicare per 3, è chiaro che si avrebbe 0, 36: ma come si deve moltiplicare per 0, 3, cioè per un numero dieci volte più piccolo di 3, si dovrà avere un prodotto dieci volte più piccolo di 0, 36, cioè delle millesime, che è ciò che accade (28) allorchè si scrive 0, 036.

55. Siccome s'impiegano i decimali per facilitare i calcoli, sostituendo ad un calcolo rigoroso un'approssimazione sufficiente, ma pronta; egli non è inutile di esporre quì un mezzo di abbreviare l'operazione, allorchè si ha bisogno d'avere il prodotto fino ad un grado di esattezza proposta.

Supponiamo, per esempio, che dovendo moltiplicare . . . . 45, 625957 per 28, 635, io abbia bisogno di avere il prodotto di meno di un millesimo circa. Io scrivo questi due numeri come si vedono quì sotto, cioè

che dopo di aver rovesciato l'ordine delle cifre di uno de' due ; lo scrivo sotto dell'altro, facendo corrispondere la cifra delle sue unità sotto del decimale immediamente inferiore di due gradi a quello, al quale io voglio limitare il mio prodotto. Indi fo la moltiplicazione, trascurando nel moltiplicando tutte le cifre che si trovano alla dritta di quello, per la quale io moltiplico: ed a misura che io cangio cifra nel moltiplicatore, porto sempre la prima cifra del nuovo prodotto sotto la prima cifra del primo. Fatto l'addizione di tutti questi prodotti, io sopprimo le due ultime cifre, cercando intanto di aumentare l'ultima di quelle che restano di una unità, se le due che io sopprimo passino 50; dopo di che io pongo la virgola nel luogo fissato dalla specie de' decimali, che mi propongo di ottenere.

ESEMPIO.

Io voglio moltiplicare 45, 625957
per 28, 635
ma ho bisogno d'avere un prodotto di circa un millesimo.

Io scrivo così questi due numeri 45, 625957
55682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

prodotto 130649913
1306, 499

E se si fusse fatta la moltiplicazione col metodo ordinario, si sarebbe avuto 1306, 4992 78695, che si accorda col precedente sino al terzo decimale, come si dimanda.

Se non vi fossero assai cifre decimali nel moltiplicando, per far corrispondere la cifra delle unità del moltiplicatore alla cifra, alla quale la regola prescrive di farla corrispondere, vi si supplirebbe mettendo de' zeri.

ESEMPIO.

Si deve moltiplicare 54, 236
per 532, 27
e si vuole avere il prodotto di un centesimo circa:

io scrivo

```
54, 236000
    72235
---------
271180000
 16270800
  1084720
   108472
    37961
---------
288681953
```

prodotto . . . . 28868, 20 aggiungendo un'unità all' ultima cifra, perchè le due, che si supprimono, passano 50.

Per terzo esempio, supponiamo che si abbia à moltiplicare 0, 227538917
per 0, 5664178
e si vogliano avere 7 decimali nel prodotto; si scriverà 0, 227538917

```
0, 227538917
   87146650
-----------
   . : . . . .
  113769455
   13652334
    1365228
      91012
       2275
       1589
        176
  128882069
-----------
```

prodotto 0, 1288821

SOPRA ALCUNI USI DELLA MOLTIPLICAZIONE

56. Noi non ci propeniamo di far conoscere tutti gli usi della moltiplicazione. Ne indicheremo alcuni solamente, che ci meneranno a conoscere gli altri.

La moltiplicazione serve a trovare in ge-

nerale il valore totale di molte unità, allorchè si conosce il valore di ciascuna. Per esempio 1. quanto debbono costare 5842 tese a ragione di 54^{l} la tesa? Bisogna moltiplicare 54^{l} per 5842, o (44) 5842^{l} 54, si avrà 315468^{l} pel prezzo totale richiesto. 2. Quanto 5954 piedi cubi di acqua pesano, supponendo che il piede cubo pesi 72 libre? Bisogna moltiplicare 72 per 5954, o 5954^{tt} per 72; si avrà 428688^{tt} pel peso de' 5954 piedi cubi.

57. S'impiega la moltiplicazione per convertire le unità d'una certa specie in unità di una specie più piccola. Per esempio, per ridurre le lire in soldi, e questi in denari; le tese in piedi, e questi in pollici, e questi ultimi in linee; li giorni in ore, queste in minuti, e quest'ultimi in secondi: si ha bisogno sovente di queste sorte di conversioni. Noi ne daremo alcuni esempj.

Se si cerca di convertire 8^{l}. 17^{s}. 7^{d} in denari; siccome la lira vale 20^{s}, si mol-

(1) *Il piede cubo è una misura di un piede di lunghezza su d'un piede di larghezza, e su d'un piede di profondità, col quale si valuta la capacità de' corpi, come si vedrà in Geometria.*

tiplicheranno le 8^l per 20 (52), ciò che darà 160^s, a i quali uniti li 17^s, si avrà 177^s, che si multiplicherà per 12, e perchè ciascun soldo vale 12 denari, si avranno 2124 denari, li quali uniti alli sette denari, danno 2131 denari pel valore di $8.^l$ $17.^s$ $7.^d$, convertiti in denari.

Se si cerca quanti minuti vale un anno comune o 365 giorni, 5 ore, e 48 minuti, o 365^g 5^o 48^m, siccome il giorno è di 24 ore, si moltiplicherà 24^o per 365, ed al prodotto 8760^o si aggiungeranno 5^o; si moltiplicherà il totale 8765 per 60 (52), perchè l'ora contiene 60 minuti, e si avranno 525900 minuti, ai quali unendo 48 minuti, si avrà 525948 pel numero de' minuti contenuto in un anno comune.

Questa conversione delle parti del tempo è utile in alcune operazioni del *Pilotaggio*.

58. L' abbreviazione di cui abbiamo parlato (52) può essere impiegata per ridurre prontamente in libbre un certo numero di *tonnellate*. Siccome la tonnellata pesa 2000. libbre, se si hanno, per esempio, 854 tonnellate, non si dovrà far altro che raddoppiare 854, e mettere li tre zeri appresso al prodot-

to: si avrà 1708000 pel numero delle libbre, che pesano 854 tonnellate.

Prima di terminare ciò che riguarda la moltiplicazione, facciamo osservare a i principianti, che queste espressioni *raddoppiare*, *triplicare quadruplicare*, ec. significano la stessa cosa che moltiplicare per 2, per tre, per 4, ec.

Della divisione de' numeri interi, e delle parti decimali.

59. Dividere un numero per un altro, è cercare in generale quante volte il primo di questi due numeri contiene il secondo.

Il numero, che si deve dividere, si chiama *dividendo*; quello per cui si divide, *divisore*, e quello, che dinota quante volte il dividendo contiene il divisore, si chiama *quoto* o *quoziente*.

Non si ha sempre per scopo nella divisione di sapere quante volte un numero contiene un altro; ma si fa l'operazione in tutti i casi, come se tendesse a questo scopo; e perciò si può sempre considerare come quell' operazione, per la quale si trova quante volte il dividendo contiene il divisore.

Da ciò ne segue, che se si moltiplica il divisore pel quoziente, si deve riprodurre il dividendo; poichè è prendere il divisore tante volte, quanto è contenuto nel dividendo: ciò è generale, o che il quoziente sia un numero intero, o che sia un numero frazionario.

In quanto alla specie delle unità del quoziente, non bisogna giudicarne nè per la specie di quelle del dividendo, nè per la specie di quelle del divisore, nè per quella dell' uno, e l'altro. Poichè il dividendo, ed il divisore restando gli stessi, il quoziente, che sarà anche sempre lo stesso numericamente, può essere molto differente per la natura delle sue unità, secondo la quistione, che dà origine a questa divisione.

Per esempio, se si tratta di sapere quante volte 8^{t} contiene 4^{t}, il quoziente sarà un numero astratto, che marcherà 2 volte. Ma se si tratta di sapere quanta opera si farà con 8^{t} a ragione di 4^{t} la tesa, il quoziente sarà 2 tese, che è un numero concreto, e la di cui specie non ha alcun rapporto col dividendo, nè col divisore.

Ma si vede fra di tanto, che la quistione

sola che conduce a fare l'attuale divisione, decide della natura delle unità del quoziente.

Della divisione d'un numero camposto da molte cifre per un numero espresso da una sola.

60. Questa operazione suppone che si sappia trovare quante volte un numero espresso da una o due cifre contiene un numero d'una sola cifra. E' una conoscenza già acquistata, quando si sanno a memoria li prodotti de' numeri che hanno una cifra. Si sa anche pervenirvi, facendo uso della tavola, che abbiamo rapportata sopra (48). Per esempio, se voglia sapere quante volte 74 contiene 9, io cerco il divisore 9 nella linea superiore, e discendo verticalmente sino a che incontro il numero più prossimo di 74, che è 72; allora il numero 8, che si trova dirimpetto a 72 nella prima colonna, è il numero delle volte, o il quoziente che io cerco.

Ciò posto, ecco come si fa la divisione d'un numero, che ha molte cifre per un numero, che ne ha una.

Scrivete il divisore a lato del dividendo, se-

parate l'uno dall'altro con una linea, e tirate sotto al divisore una retta, sotto della quale voi scriverete le cifre del quoziente, a misura che le troverete.

Prendete la prima cifra a sinistra del dividendo, o le due prime, se la prima non contiene il divisore,

Esaminate quante volte questa prima o queste due prime cifre contengono il divisore; scrivete questo numero di volte sotto del divisore.

Moltiplicate il divisore pel quoziente, che avete scritto, e notate il prodotto sotto della parte del dividendo, che avete divisa.

Finalmente sottraete il prodotto dalla parte superiore del dividendo, cui corrisponde, ed avrete un residuo.

A fianco di questo residuo abbassate la cifra seguente del dividendo principale, ed avrete un secondo dividendo parziale, sul quale opererete come sul primo, situando il quoziente a dritta del già trovato, moltiplicando parimente il divisore pel quoziente, scrivendo, e sottraendo il prodotto come prima.

Abbassate similmente a lato del residuo di questa divisione la çifra del dividendo, che

segue quella, che voi avete abbassata, e continuate sempre della stessa maniera sino all' ultima inclusivamente.

Questa regola si rischiarirà coll' esempio seguente.

ESEMPIO

Si propone di dividere 8769 per 7.

Io scrivo questi due numeri come si vedono quì appresso.

dividendo	7 divisore
8769	1252 $\frac{5}{7}$ quoziente
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E cominciando dalla sinistra del dividendo, io dovrei dire in 8 mila quante volte entra il 7: ma io dico semplicemente il 7 quante volte entra iu 8? Entra una volta. Quest' 1 è naturalmente mille, ma le cifre che seguiranno le daranno il suo vero valore; e perciò io scrivo semplicemente 1 sotto del divisore.

Moltiplico il divisore 7 pel quoziente 1, e scrivo il prodotto 7 sotto della parte 8, che

ho divisa ; e facendo la sottrazione , ho per residno. 1 .

Questo residuo 1 è la parte di 8, che non è stata divisa , ed è una decina riguardo alla cifra seguente 7 ; e perciò io abbasso questa medesima cifra 7 a fianco ; e continuo l'operazione, dicendo in 17 quante volte entra, il 7.? 2 volte . Io scrivo questo 2 a dritta del primo quoziente 1 , che ha dato la prima operazione.

Moltiplico , come nella prima operazione, il divisore 7 pel quoziente 2, che ho trovato : porto il prodotto 14 sotto del dividendo parziale 17, e sottraendo , rimane 3, parte, che non si è potuto dividere .

A fianco di questo residuo 3 io abbasso 6 terza cifra del dividendo, e dico, in 36 quante volte entra il 7? 5 volte: scrivo 5 al quoziente .

Io moltiplico il divisore 7 per 5; ed avendo scritto il prodotto 35 sotto del nuovo dividendo parziale, ne lo sottraggo, e mi rimane 1.

In fine a lato di questo residuo 1 abbasso la cifra 9 del dividendo, e dico in 19 quan-

te volte entra il 7? 2 volte. Io scrivo 2 al quoziente.

Moltiplico il divisore 7 per questo nuovo quoziente 2, ed avendo scritto il prodotto 14 sotto dell' ultimo dividendo parziale 19, ho per residuo 5:

Io trovo dunque che 8769 contiene 7 tante volte, quanto l' addita il quozieute che abbiamo scritto; cioè 1252 volte, e che rimane 5.

Riquardo a questo residuo, ci contenteremo per ora di dire che si scrive a fianco del quoziente, come si vede in questo esempio, cioè scrivendo il divisore sotto di questo residuo, e separando l' uno dall' altro con una retta: ed allora si pronunzia *cinque settimi*. Noi spiegheremo in seguito la natura di questa sorta di numeri.

61. Se nel corso dell' operazione alcuno de' dividendi parziali non contenesse il divisore, si scriverebbe zero al quoziente; tralasciando la moltiplicazione; si abbasserebbe tosto un' altra cifra a fianco di questo dividendo parziale; e si continuerebbe la divisione.

ESEMPIO

Si tratta di dividere 14464 per 8

```
14464 | 8
 8    |1808
 --
 64
 64
 ----
  064
   64
  ---
    o
```

Io prendo quì le due prime cifre del dividendo, perchè la prima non contiene il divisore.

Trovo che 14 contiene 8 1 volta, e scrivo 1 al quoziente: moltiplico 8 per 1, e sottraggo il prodotto 8 da 14, che mi dà per resto 6, a fianco del quale abbasso la terza cifra 4 del dividendo.

Continuo dicendo, in 64 quante volte entra 8? otto volte. Io scrivo 8 al quoziente, e moltiplicando, ho per prodotto 64, che sottraggo del dividendo parziale 64, e mi resta o, a lato del quale abbasso 6 quarta cifra del dividendo: e come 6 non contiene 8,

io scrivo o al quoziente, ed abbasso subito a fianco di 6 l'ultima cifra del dividendo, che è 4, per dire in 64 quante volte entra 8? vi entra 8 volte. Dopo di avere scritto 8 al quoziente, moltiplico, e sottraggo il prodotto 64: e come non rimane niente, io conchiudo che 14464 contiene 8, 1808 volte.

Della divisione per un numero composto da molte cifre.

62. Allorchè il divisore avrà molte cifre, si procederà nel modo seguente.

Prendete sulla sinistra del dividendo tante cifre, quante bastano per contenere il divisore.

Ciò posto, in vece di esaminare come sopra quante volte la parte del dividendo, che avete preso contiene il divisore intero, vedete solamente quante volte la prima cifra del divisore si contiene nella prima cifra del dividendo, o nelle due prime, se la prima non basta: notate questo quoziente sotto del divisore come prima.

Moltiplicate successivamente secondo la regola data (50), tutte le cifre del divisore per

questo quoziente ; e scrivete le cifre del prodotto sotto le cifre corrispondenti del dividendo parziale . Fate la sottrazione, ed a lato del residuo abbassate la cifra seguente del dividendo ,, affin di continuare l' operazione nella medesima maniera.

Noi rischiariremo ciò con qualche esempio, e preverremo i casi, che possono cagionare qualche imbarazzo.

ESEMPIO.

Si proponga di dividere 75347 per 53

```
75347 | 53
53    |---------
----- | 1471 34/53
 223
 212
 ---
  114
  106
  ---
   87
   53
   --
   34
```

Io prendo solamente le due prime cifre del dividendo, perchè contengono il divisore; ed in vece di dire quante volte il 53 entra in 75, cerco solamente quante volte le 7 decine di 75 contengono le 5 decine di 53, cioè quanto il 7 contiene il 5. Io trovo una volta, che scrivo al quoziente. Moltiplico 53 per 1, e

porto il prodotto 53 sotto del 75: fatta la sottrazione resta 22 , a lato del quale abbasso la cifra 3 del dividendo; e prosieguo dicendo; per maggior facilità, in 22 quante volte entra 5, in vece di dire il 53 qnante volte entra in 22 3); e trovo 4 volte, che scrivo al quotiente.

Moltiplico successivamente per 4 le due cifre del divisore, e scrivo il prodotto 212 sotto del dividendo parziale 223: fatte la sottrazione, ho per residuo 11. Abbasso a fianco di questo residuo la cifra 4 del dividendo, e dico semplicemente come qui sopra, il 5 quante volte entra in 11 ? 2 volte. Io lo scrivo al quozieute, e moltiplico 53 per 2, che mi dà 106, che scrivo sotto del dividendo parziale 114: fatta la sottrazione, ho per residuo 8, a lato del quale abbasso l'ultima cifra 7. Divido similmente 87, e continuando come sopra, io trovo 1 per quoziente, e 34 per residuo, che scrivo a fianco del quozionte, nel modo che è stato accennato di sopra (60).

63. Si dovrebbe a rigore cercare quante volte ciascun dividendo parziale contiene l'intero divisore; ma come questa ricerca sareb-

be sovente lunga e penosa, ci contentiamo, come si è veduto, di cercare quante volte la parte più grande di questo dividendo contiene la parte più grande del divisore. Il quoziente che si trova per questa via, non è sempre il vero, perchè con ciò non si fa realmente che una stima approssimante; ma oltrecchè questa stima conduce sempre allo scopo, e che nel caso in cui non conduca, ella di poco se ne allontana; la moltiplicazione che segue, serve a rettificare ciò che può esservi di difettoso in questo giudizio. Infatti, se il dividendo parziale contenesse realmente il divisore tre volte, per esempio, e che pel saggio che si è fatto, si fusse trovato contenerlo 4 volte, è facile vedere, che facendo la moltiplicazione per 4, si avrebbe un prodotto più grande del dividendo; perciocchè si prenderebbe il divisore più volte di quello che e realmente è contenuto in questo dividendo, e per conseguenza la sottrazione divverrebbe impossibile: allora si diminuirà il quoziente successivamente di una, due, le unità, sino a che si ottenga un prodotto, che si possa sottrarre. Al contrario, se si fosse messo 2 al quoziente, il residuo della sottrazione si tro-

verebbe più grande del divisore: ciò che proverebbe che il divisore vi è ancora contenuto, e per conseguenza il quoziente è troppo piccolo.

Del resto si acquista in poco tempo l'uso, di prevedere di quanto si deve diminuire, o accrescere il quoziente, che dà la prima pruova.

ESEPIO II.

Si propone di dividere 189492 per 375.

189492	375
1875	$505 \frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Io prendo le quattro prime cifre del dividendo, perchè le prime tre non contengono il divisore.

Dico dopo, il 3 quante volte entra in 18? vi entra realmente 6 volte. Ma moltiplicando 375 per 6 io avrei più del dividendo 1894; e perciò io scrivo solamente 5 al quoziente. Moltiplico 375 per 5, e dopo di

avere scritto il prodotto sotto di 1894, io lo sottraggo, ed ho per residuo 19.

Abbasso a lato di 19 la cifra 9 del dividendo, e come 199, che ho allora, non contiene 375, pongo o al quoziente, ed abbasso a fianco di 199 la cifra 2 del dividendo, ciò che mi dà 1992, per lo quale io dico, il 3 quante volte entra in 19 solamente? sei volte. Ma per la stessa ragione di sopra, io scrivo al quoziente 5: e dopo di avere operato come prima, ho per residuo 117.

64. Ecco una riflessione che può servire per evitare in moltissimi casi de' tentativi inutili. Allorchè la seconda cifra del divisore è sensibilmente più grande della prima, si è principalmente soggetto a questi saggi dubbiosi. In questo caso, invece di cercare quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nella parte corrispondente del dividendo, bisogna cercare quante volte questa prima cifra accresciuta di un' unità si contiene nella parte corrispondente del dividendo. Questa pruova sarà più approssimante della prima.

ESEMPIO.

Si proponga di dividere 1832 per 288

1832	288
1728	$6\frac{104}{188}$
104	

In vece di dire 2 quante volte entra in 18, io dirò il 3 quante volte entra in 18, perchè il divisore 288 si approssima moltoppiù a 300 che a 200: io trovo che 6 è il vero quoziente; invece che avrei trovato 9, e sarei stato per conseguenza obbligato di fare tre saggi nutili.

Mezzi per abbreviare il metodo precedente.

65. Per rendere il metcdo più facilè a capirsi, abbiamo stabilito di scrivere sotto di ciascun dividendo parziale il prodotto, che si ottiene moltiplicando il divisore pel quozieute. Ma siccome lo scopo dell' Aritmetica deve essere di abbreviare le operazioni, noi credia-

mo di far osservare, che si può trascurare di scrivere questi prodotti, e fare la sottrazione a misura che si è moltiplicata ciascuna cifra del divisore. L'esempio seguente basterà per far intendere come si faccia questa sottrazione.

ESEMPIO.

Si vuol dividere 756984 per 933

Dopo di aver preso le quattro prime cifre del dividendo, che bisognano per contenere il divisore, io trovo che 75 contiene il 9 8 volte; e perciò scrivo 8 al quoziente, ed in vece di portare sotto di 7569 il prodotto di 932 per 8, io moltiplico tosto 2 per 8, che mi dà 16. Ma siccome non posso togliere 16 da 9, io impronto sulla cifra seguente 6 una decina, la quale unita a 9 mi

dà 29, dalla quale togliendo 16, mi rimane 3, che scrivo al di sotto.

Per tener conto di questa decina improntata, in vece di dimuire di una unità la cifra 6, dalla quale io ho improntato, ritengo questa unità, che aggiungo al prodotto seguente; e così continuando la moltiplicazione, io dico 8 volte 3 fanno 24, ed 1 che ho ritenuto fan 25. Come non posso sottrarre 25 da 6, io impronto dalla cifra seguente 5 del dividendo due decine, le quali unite a 6, mi danno 26, dalle quali tolgo 25, e mi resta 1, cha io scrivo sotto del 5. Con ciò io ho tenuto conto della prima decina, di cui avrei dovuto diminuire 6, perchè ho sottratta una decina dippiù. Io terrò ugualmente conto delle due decine che ho improntate. Continuo dunque dicendo 8 volte 9 fanno 72, e 2 che ho improntate fanno 74, le quali sottratti da 75, resta 2.

Abbasso a fianco del residuo 113 la cifra 8 del dividendo, e continuo nella stessa maniera, dicendo 9 quante volte entra in 11? 1 volta; dopo 1 volta 2 fa 2, il quale sottratto da 8 rimane 6; una volta 3 fa 3, che tolto da 3, resta 0: volta 1 volta 9 fa 9, che

tolto da 11 resta 2. Abbasso la cifra 4 a fianco del residuo 206, dico 9 quante volte entra in 20? 2 volte; e moltiplicando 2 per 2 fanno 4, che tolti da 4, resta 0; 2 volte 3 fan 6, che tolti da 6, resta 0; ed infine 2 volte 9 fan diciotto, che tolto da 20 resta 2.

66. Può accadere nel corso delle divisioni parziali, che il dividendo contenga più di 9 volte il divisore; intanto non si deve mai mettere più di 9 al quoziente; perchè se si potesse solamente mettere 10, sarebbe una pruova che il quoziente trovato coll' operazione precedente, sarebbe falso; poichè la decina che si troverebbe nel quoziente attuale, apparterrebbe a questo primo quoziente.

67. Se il dividendo e il divisore fossero seguiti da zeri, se ne potrebbero togliere all' uno, e all' altro tanti, quanti ve ne sono appresso a quello che ne ha meno. Per esempio, per dividere 8000 per 400, io dividerò solamente 80 per 4; perciocchè egli è chiaro, che 80 centinaja contengono 4 centinaja tante volte, quante volte 80 unità contengono 4 unità.

Della divisione delle parti decimali.

68. Per non fermarci a distinzioni superflue, ridurremo l'operazione della divisione de' decimali a questa regola sola.

Mettete appresso a quello de' due numeri proposti, che ha minor numero di caratteri decimali, un numero di zeri sufficiente perchè il numero de' decimali diventi lo stesso in ciascuno; (ciò non cangerà per nulla il valore di questo numero (30); sopprimete la virgola nell'uno e nell'altro, e fate l'operazione come per li numeri interi: il quoziente che troverere, sarà il vero.

ESEMPIO.

Si proponga di dividere 12, 52 per 4, 3

Io scrivo 12, 52 | 4, 3

O piuttosto 12, 52 | 4, 30

completando il numero de' decimali.

Sopprimendo la virgola, ho 1252 da dividere per 430; e facendo l' operazione;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 392 & 2\frac{392}{430} \end{array}$$

io trovo 2 per quoziente, e 392 per residuo, cioè, che il quoziente è 2 e $\frac{392}{430}$.

Ma siccome si ha per oggetto che quando si usano li decimali si cerca di evitare le frazioni ordinarie; in vece di scrivere il residuo 392 sotto la forma di frazione, come si è fatto, si continuerebbe l' operazione come nell' esempio seguente.

ESEMPIO

```
1252 | 430
     |2,9116
 3920
 500
  700
  2700
   120
```

Dopo di aver trovato il quozieute intiero, che quì è 2, si scriverà a lato del residuo 392 un zero, che renderà questo residuo dieci volte troppo grande. Si continuerà a dividere per 430, e vedendo che bisognerebbe mettere 9 al quoziente, gli si pone effettivamente, ma dopo di aver segnato il luogo delle unità intere, mettendo una virgola appresso al 2. Con questo mezzo il 9 indicherà delle parti decime. Dopo fatta la moltiplicazione, e la sottrazione, si metterà a fianco del residuo 50 un zero, che vale lo stesso che se si fossero messi due o a lato del dividendo: ma mettendo appresso 9, il quoziente 1, che si troverà, gli darà il suo vero

valore; poichè allora egli esprime delle centesime. Si continnerà così, sino a che si crederà necessario. Attenendosi a due decimali si ha il valore del quoziente presso a poco meno di un centisimo di unità; e spingendo sino a tre cifre, si ha il quoziente meno di un millesimo, e così continuando; perciocchè non si potrebbe mettere un' unità dippiù o di meno, senza rendere il quoziente troppo grande, o troppo piccolo.

Tutti li residui della divisione possono essere ridotti così a decimali.

Rimane a spiegare perchè la soppressione della virgola nel dividendo, e nel divisore non cangia per niente il quoziente, allorchè si è renduto lo stesso il numero de' decimali in ciascuno de' due numeri. Ciò è facile a comprendersi, perchè nell' esempio di sopra il dividendo 12, 52, e 'l divisore 4, 30 non sono altra cosa che 1252 centesime, e 430 centesime; poichè le unità intere vagliono delle centinaja di centesime (22). Or egli e chiaro che 1252 centesime contengono 430 centesime, quante volte, quante volte 1252 unità contengono 430 unità. Quindi la considerazione della virgola è

inutile, quando si è completato il numero di decimali.

69. Allorchè non si ha bisogno di conoscere il quoziente d' una divisione, che sino ad un certo grado di esattezza proposto, si può abbreviare il calcolo col metodo seguente. Noi supporremo da principio che non si abbia bisogno di conoscere, che ciò che riguarda un' unità ad un di presso: faremo conoscere in seguito come si debba applicare il metodo per averla quanto più si può approssimamente. Ecco la regola.

Sopprimete sulla dritta del dividendo tante cifre meno una, quante ve ne sono nel divisore. Fate indi la divisione col metodo ordinario. Se non rimane residuo, scrivete appresso al quoto tanti zeri, quante sono le cifre che avete soppresse nel dividendo. Ma se vi rimane un residuo, voi continuerete a dividere non pel divisore medesimo di prima, ciò che non è possibile, ma per quel divisore, di cui avrete soppressa l' ultima cifra a dritta. Dopo di questa divisione dividerete il nuovo residuo pel divisore precedente, di cui sopprimete l' ultima cifra sulla dritta: e continuerete così a dividere, sopprimendo in cia-

scuna divisione una cifra sulla dritta del divisore.

ESEMPIO

Si cerca, presso a poco meno d' un' unità il quoziente di 8789236487 diviso per 64423. Io sopprimo le quattro ultime cifre dalla dritta del dividendo, e divido 878923 pel divisore proposto 64423.

878923	64423
234693	136430
41424	6442
2772	644
196	64
4	6

Io trovo subito 13 per quoziente; e 41424 per residuo. Divido dunque li 41424 per 6442, sopprimendo l' ultima cifra 3 del divisore: ho per quoziente 6, che scrivo dopo del primo quoziente 13; ed il residuo è 2772 che divido per 644, sopprimendo ancora una cifra sulla dritta del divisore primo, ho per

quoziente 4, che scrivo appresso al quoziente principale 136; il residuo è 196, che divido per 64, sopprimendo ancora una cifra nel divisore, il quoziente è 3, ed il residuo è 4. Finalmente io divido per 6, ed ho o per quoziente; di sortecche il quozieute di 8789236487 diviso per 64423, è 136430 meno un unità circa. In fatti, il quoziente esatto è 136430 $\frac{6597}{64425}$. Non è necessario di scrivere oiascuna volta, come si è fatto, il nuovo divisore; si può cancellare nel divisore primitivo ciascuna cifra a misura che si passa ad una nuova divisione: si sono scritti questi divisori a fianco de' residui successivi, per rendere l'operazione più sensibile.

70. Se il residuo della prima divisione si trovasse più piccole del divisore dopo di aver soppressa l'ultima cifra, si metterebbe zero al quoziente; e se si trova ancora più piccolo, che non sarebbe questo divisore, dopo che se n'è ancora tolto l' ultimo dalle cifre rimanenti, si metterebbe anche un zero al quoziente, e così di seguito.

ESEMPIO.

Per avere il quoziente di 55106054 diviso per 643 con un' unità di meno circa, io divido al solito la parte 551060, che rimane dopo la soppressione delle due ultime cifre del dividendo proposto.

551060	643
5666	85701
4510	64
009	6
9	
9	
3	

Ho per quoziente 857, e 9 per residuo. Bisogna dunque dividere questo residuo per 64 solamente, e siccome 9 non contiene questo divisore, io pongo 0 al quoziente, ed ho ancora 9 per residuo, che divido per 6 solamente; di sortacchè il quoziente cercato è 85701 meno un'unità circa.

71. Quando al principio dell' operazione si

sopprimono sulla dritta del dividendo quelle cifre, che la regola prescrive di sopprimersi, si trova che le cifre rimanenti non contengono il divisore, si sopprimeranno all' istante sulla dritta del divisore tante cifre, quante bastino perchè il divisore vi sia contenuto.

ESEMPIO.

Si cerca il quoziento di 1611527 diviso per 64524.

Sopprimo le quattro cifre 1527 della dritta del dividendo. Ma come le cifre rimanenti 161 non possono essere divise per 64524, io sopprimo in questo divisore le tre ultime cifre 324, che debbono essere soppresse perchè il divisore sia contenuto nel dividendo rimanente 161: così io divido 161 per 64, ed opero come nell' esempio precedente.

|64
—
161 | 25
33 . . | 6
3

Ho 25 per quoziente di 1611527 diviso per 64524 con una unità di meno circa. In fatti il quoziente esatto è $24 \frac{62951}{64524}$, che è molto più prossimo di 23 che di 24.

72. A misura che si sopprime una cifra nel divisore, conviene per maggiore esattezza aumentare d'una unità l'ultima di quelle che restano, se quella, che si sopprime è maggiore o eguale a 5. Si aumenterà anche di un'unità l'ultima delle cifre, che restano nel dividendo, dopo la soppressione, che la regola prescrive, se queste sorpassino 5, o 50, o 500, secondocchè ve n'ha 1, 2, 3.

ESEMPIO.

Si cerca il quoziente di 8657627 diviso per 1987 con una unità di meno circa.

Divide dunque 8658 per 1987 come siegue.

```
8658 | 1987
     |-----
 710   4357
 113    199
  13     20
          2
```

Cioè, invece di dividere il residuo 710 per 198 solamente, divido per 199, perchè l'ultima cifra 7, che sopprimo, è maggiore di 5. Lo stesso si faccia per la divisione seguente. Ma come l'ultimo divisore, che è contenuto 6 volte $\frac{1}{2}$ in 13 è un poco troppo grande, scrivo 7 al quoziente per dare un certo compenso.

73. Intanto è facile vedere ciò che debba farsi, allorchè si voglia un quoziente molto più esatto. Per esempio, se si volesse avere il quoziente di una diecimillesima d'unità circa,

la quistione si ridurrebbe a porre appresso al dividendo tanti zeri, quanti caratteri decimali si vogliono al quoziente (qui sarebbero quattro); ed indi si farà la divisione col metodo attuale. Ed allorchè si sarà trovato il quoziente con una unità di meno circa, si separeranno sulla dritta con una virgola tante cifre, quanti decimali si vogliono.

ESEMPIO.

Si cerca, con una dieci millesima di unità di meno circa, il quoziente di 6927 diviso per 4532. Io metto quattro zeri dopo di 6927, e la quistione si riduce a trovare con una unità di meno circa il quoziente di 69270000 diviso per 4532, cioè secondo la regola quì sopra, a dividere 69270 per 4532, come siegue.

```
69270 | 4532
23950 | 15285
 1290 . 453
  384 . 45
   24 . 5
```

Il quoziente cercato è dunque, 1, 5285 con una dieci millesima d' unità di meno circa.

Se vi fossero de' decimali nel dividendo, e nel divisore, o in tutti due cioè si cercherebbe di farli svanire, per ciò che è stato detto (68), dopo di che si opererebbe come in quest' ultimo esempio.

Quindi se si volesse ridurre una frazione proposta in decimali, vi si perverrebbo sollecitamente con questo metodo, avendo riguardo a ciò che è stato detto (71).

Così se si vuol ridurre $\frac{4253}{9678}$ in decimali, ed averne il valore con una millesima di un' unità di meno circa; si dovrà dividere 425, 000 per 6978, o (71) a dividere 4253 per 968 col metodo attuale. Si troverà dunque 439; di sortacchè si avrà 0, 439 per lo valore di $\frac{4253}{9678}$ con un m millesimo di meno circa.

74. Nondimeno potrebbe accadere che il quoziente trovato con questa regola fusse mancante di 1, 2, o tre unità nell' ultima cifra. Quantunque questo caso accade raremente, non è inutile però far osservare, che si può sempre prevenirlo facilmente, separando al principio dell' operazione, sulla dritta del dividendo tante cifre meno due, quante ve ne sono nel divisore; ed operando nel resto co-

me quì sopra. Allorchè si sarà trovato il quoziente, se ne sopprimerà l' ultima cifra, avvertendo di aggiungere un' unità all' ultima di quelle che resteranno, se quella che si sopprime è maggiore di 5.

Pruova della moltiplicazione, e divisione.

75. Si può ricavare dalla definizione stessa, che abbiamo data di ciascuna di queste due operazioni, la maniera di farne la pruova; poichè nella moltiplicazione il moltiplicando si prende tante volte, quante sono le unità del moltiplicatore, ne siegue che se si cerca quante volte il prodotto contiene il moltiplicando, cioè (59) se si divida il prodotto per lo moltiplicando, dovrà trovarsi per quoziente il moltiplicatore; e siccome si può prendere il moltiplicando per moltiplicatore, *e vice versa*: in generale, *se si divida it prodotto di una moltiplicazione per uno de' suoi fattori, dovrà trovarsi per quoziente l' altro fattore.*

Per esempio, avendo trovato quì sopra (50) che 2864 moltiplicato per 6 ha dato 17184; io divido 17184 per 2864, e debbo ritrovare, e trovo in effetto 6 per quoziente.

Similmente, poichè il quoziente di una divisione esprime quante volte il dividendo contiene il divisore, ne segue che se si prenda il divisore tante volte, quanto l' addita il quoziente, cioè se si moltiplica il divisore pel quoziente, si dovrà riprodurre il dividendo, allorchè la divisione è esatta, e che nel caso in cui vi sia un residuo, se si moltiplichi il divisore pel quoziente, ed al prodotto si aggiunga il residuo della divisione, si dovrà riprodurre il dividendo.

Per esempio, noi abbiamo trovato quì sopra (63) che 189492 diviso per 375 dava 505 per quoziente, e 117 per residuo: moltiplicando 375 per 505, si trova 189375, al quale unendo il residuo 117, si ritrova il dividendo 189492.

Così la moltiplicazioue, e la divisione possono servirsi di pruova reciprocamente.

Ma si possono verificare queste operazioni con un mezzo più pronto, che noi quì esporremo: non bisogna perciò trascurare le riflessioni, che abbiamo fatte: esse saranno utili in molte altre occasioni.

Pruova col 9

76. Supponiamo che dopo di aver moltiplicato 65498 per 454, e ritrovato per prodotto 29736 092, si voglia far la pruova se questo prodotto sia esatto.
Si sommeranno tutte le cifre del moltiplicando 6, 5, 4, 9, 8 come se contenessero delle semplici unità; e si toglierà il 9 quante si potrà; si avrà un residuo, che sarà quì 5.

Si sommeranno similmente le cifre del moltiplicetore 4, 5, 4, e togliendosi ugualmente quanti 9 si possono, si avrà per residuo 4

Si moltiplicherà il resto 5 del moltiplicando pel resto 4 del moltiplicatore, e dal prodotto 20 si toglierà quante volte si potrà il 9: rimarrà 2.

Se il prodotto è esatto, bisognerà che sommando del pari tutte le cifre 2, 9, 7, 3. 6, 0, 9, 2, di questo prodotto, e togliendovi tutti li 9, rimanga 2, ciò che effettivamente si trova.

Questa regola è fondata su questo principio, che per avere il residuo della sottrazione di tutti li 9, che un numero può contene-

re, si deve cercare il residuo che rimane dopo di aver tolti tutti li 9 dalla somma delle cifre considerate come semplici unità.

In fatti se da un numero espresso da una sola cifra seguita da molti zeri, si tolgano tutti li 9, il residuo sarà espresso da questa sola cifra: se da 4000, o da 500, o da 60000 voi togliete tutti li 9, il residuo sarà 4, o 5, o 6, ciò che è facile a vedere.

Dunque il residuo, che un numero darebbe, come 65498 per la soppressione del 9 (che è la stessa cosa che 60000 più 5000, più 400, più 90, più 8), sarà lo stesso di quello che darebbe 6, più 5, più 4, più 9, più 8; vale a dire lo stesso che se si accoppiassero le sue cifre come contenenti delle semplici unità.

Ecco intanto l' applicazione alla pruova della moltiplicazione.

Poichè 65493 è composto d' un certo numero di 9, e del residuo 5, e che il moltiplicatore 454 è composto altresì d' un certo numero di 9, e di un residuo 4, non può non avvenire, tolto il prodotto di 5 per 5 o 20, che il prodotto totale non sia divisibile per 9; o pure che togliendo il 9, che il prodotto totale non

sia divisibile per 9; toltone però il 2. Quindi dovrà rimanere al prodotto la stessa quantità, che nel prodotto dei due residui si trova dopo la soppressione del 9, che egli racchiude.

Si potrà fare ancora questa pruova della stessa maniera col numero 3.

Riguardo alla divisione è facile farne la pruova, dopo ciò che è stato detto (70). Dopo di aver tolto dal dividendo il residuo, che ha dato la divisione, si considererà il risultato come un prodotto di cui il divisore ed il quoziente sono li fattori; e per conseguenza vi si applicherà la pruova per 9 della medesima maniera che si è ora fatta. (1)

(1) *A parlare esattamente, questa verifica non è infallibile, perchè nella moltiplicazione, per esempio, se si fosse commesso lo sbaglio di qualche unità su qualche cifra del prodotto, e che nello stesso tempo, si fusse fatto un simile errore, ma in senso contrario su qualche cifra dello stesso prodotto; come ciò non cangerebbe niente al residuo, che si avrebbe dopo la soppressione del 9, questa regola non farebbe punto percepire l' errore. Ma come bisognano, come si vede, due errori che si compensino, o che non differiscano, che d'un cer-*

Alcuni usi della regola precedente.

77. La divisione serve non solamente a trovare quante volte un numero contiene un altro, ma ancora a dividere un numero in parti eguali. Prendere la metà, il terzo, il quarto, il quinto, il ventesimo, il trentesimo d'un numero, è dividere questo numero per 2, 3, 4, 5, 20, 30 ec, o dividerlo per 2, 3, 4, 5, 20, 30 ec. o partirlo in 2, 3, 4, 5, 20, 30 parti uguali, per prendere una di queste parti.

La divisione serve ancora a convertire le unità d'una certa specie in unità d'una specie superiore: per esempio, un certo numero di denari in soldi, e questi in lire. Per ridurre 5854 denari in soldi si osserverà che piochè bisognano 12 denari per fare un soldo, quante volte 12 denari sarà contenuto in 5854 denari, altrettanti soldi vi saranno. Bisogna dunque dividere per 12, e si troverà 488 e 8 di resto. Per ridurre in lire 488s, si di-

to numero di volte 9, li casi in cui questa verificazione sarebbe errorea, sarebbero rarissimi nella prattica.

viderà 488 per 20, poichè bisognano 20^s per fare una lira; e si avranno in tutto 24 lire, 8 soldi e 8 denari.

In occasione di questa divisione per 20 osserviamo, che quando si deve dividere per un numero seguito da zeri, si può abbreviare l'operazione separando sulla dritta del dividendo tante cifre quanti sono li zeri: si divide al parte che rimane a sinistra per le cifre significative del divisore; se vi sarà un residuo, si scriverà dopo delle cifre, che si sono separate; ciò che dà il residuo totale. Per esempio, per dividere 5834 per 20; io separo l'ultima cifra 4, e divido per 2 la parte restante 583; ed ho per quoziente 291, ed 1 per residuo: scrivo a lato di questo residuo 1 la cifra separata 4, ciò che mi dà 14 per residuo totale; di sortacchè il quoziente è $291 \frac{14}{20}$.

Questa abbreviazione può applicarsi alla riduzione del carico d'una nave in tonnellate di peso. Se sia il carico di 2584954 libbre; per ridurlo in tonnellate, cioè per dividerlo per 2000, si separeranno le tre ultime cifre di dritta, e prendendo la metà delle altre, si avranno 1292 tonnellate e 954 libbre.

Quando si vuole valutare in lire, e soldi

il ventesimo d'un numero di lire proposto, segue da questa regola, che l'operazione si riduce a contare l'ultima cifra per soldi, e prendere la metà delle altre cifre, che si conteranno per lire. Se prendendo questa metà, rimane un'unità, si computerà per una decina di soldi, che si situerà a sinistra della cifra, che si è da principio separata. Per esempio, se si voglia il ventesimo di 54672 lire, si separerà l'ultima cifra 2, che si conterà per 2 soldi; e prendendo la metà di 5467 che è 2733 con un'unità di residuo, si scriverà 2733 lire 12 soldi: la ragione di questa regola è chiara, riflettendo che 54672 lire sono 54660 lire più 12 lire. Or il ventesimo di 54660 è evidentemento 2733, e quello di 12 lire è 12 soldi, perchè il ventesimo d'una lira è un soldo. Se vi fussero de' soldi, e de' denari nella somma proposta, si trascurerebbero li denari, di cui la ventesima parte non può mai fare un denaro. Rignardo ai soldi, si triplicherebbero; e prendendo il quinto, si porterebbero a i denari. Così il ventesimo di 54672 lire, 17 soldi, 7 denari, è 2733 lire, 12 soldi, 10 denari.

Se si trattasse di avere il decimo d'un numero di lire, si separerebbe l'ultima cifra, e

raddoppiandola , si computerebbe in soldi; e si conterebbero come lire tutte le cifre rimanenti sulla sinistra. Così il decimo di 67987 lire è 6798 lire, e 14 soldi. La ragione, per la quale si raddoppia l'ultima cifra, è che il decimo d'una lira è 2 soldi.

Sevente volte vi è bisogno di prendere li quattro denari per lira d'una somma proposta. Ciò si riduce a prenderne tosto il ventesimo, siccome è stato detto : indi prendere il terzo di questo ventesimo. Così per avere li quattro denari per lira di 8762 lire, io prendo il ventesimo, che è di 438 lire, e 2 soldi, di cui il terzo 146 lire, o soldi, e 8 denari forma li quattro danari per lira di 8762 lire, Infatti li qnattro denari per lira non sono altra cosa che la sessantesima ; poichè 4 denari son contenuti 60 volte nella lira. Or la sessantesima è il terzo di un ventesimo.

Delle Frazioni.

78. Le frazioni considerate aritmeticamente sono numeri , co' i quali si esprimono le quantità più piccole dell'unità.

Per farsi un' idea chiara delle frazioni, bisogna concepire, che la quantità, che si è presa da principio per unità, è ella medesima composta d'un certo numero di unità più piccole, come si concepisce, per esempio, che la lira è composta di venti parti, o venti unità più piccole, che si chiamano soldi.

Una o molte di queste parti formano ciò, che appellasi frazione dell' unità. Si dà anche questo nome a'i numeri, che rappresentano queste parti.

79. Una fraziono può essere espressa in numeri di due maniere, che sono ciascuna in uso.

La prima maniera consiste a rappresentare, come li numeri interi, le parte dell' unità, che contengono le quantità di cui si tratta; ma allora si dà un nome particolare a queste parti. Così per marcare 7 parti, di cui se ne concepiscono 20 nella lire, s' impiegherebbe la cifra 7, ma si pronunzierebbe 7 soldi, e si scriverebbe 7. Questa maniera di espimere le parti dell' unità ha luogo nei numeri complessi, di cui parleremo in appresso.

80. Ma siccome vi bisognerebbe un segno particolare per ciascuna divisione, che si fa-

cesse dell' unità, si evita questa moltiplicazione di segni, esprimendo una frazione con due numeri situati l' uno sotto dell' altro, e separati con un tratto. Così, per esprimere le 7 parti di sopra menzionate, si scrive $\frac{7}{20}$, vale a dire, che in generale si scrive prima il numero, che addita quante parti contiene dell' unità la quantità di cui si tratta; e si scrive sotto di questo numero quello, che indica in quante parti è divisa l' unità.

81. E per enunciare una frazione, si proferisce prima il numero superiore (, che si chiama *il numeratore*); indi il numero inferiore (che si chiama *il denominatore*); ma si aggiunge al nome di questo la terminazione *esimi*. Per esempio, per pronunziare $\frac{7}{20}$ si dirà *sette ventesimi*. Per pronunziare $\frac{4}{5}$ si dirà *quattro quinti*, e con questa espressione *quattro quinti*, si debbe intendere quattro parti, di cui ne abbisognano cinque per comporre l' unità.

Si debbono eccettuare solamente dalla terminazione generale le frazioni, li di cui denominatori sono 2, 3, 4, che si pronunciano *metà* o *mezzi*, *terzi*, *quarti*. Così, queste frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ si pronunzieranno *un mezzo*, *due terzi*, *tre quarti*.

82. Il numeratore esprime dunque quante parti dell'unità contiene la quantità rappresentata dalla frazione, ed il denominatore fa conoscere di qual valore sono queste parti, esprimendo quante ve ne bisognano per comporre l'unità. Gli si dà il nome di denominatore, perchè esso dà il nome alla frazione, e fa che in queste due frazioni, per esempio, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{7}$ le parti della prima si chiamino delle *cinqu sime*, o quinte e le parti della seconda si chiamino delle *settime*.

83. Il numeratore, ed il denominatore si chiamano anche con un nome comune, li due *termini della frazione*.

Degl' interi considerati sotto la forma di frazioni.

84. Le operazioni che si fanno sulle frazioni conducono sovente a de' risultati frazionarii, di cui il numeratore è più grande del denominatore, per esempio a de' risultati come $\frac{8}{3}$, $\frac{27}{5}$ ec.

Queste sorte d'espressioni non sono delle frazioni propriamente dette, ma sono numeri interi uniti a frazioni.

85. Per estrarre gl'interi, che vi si contengono, bisogna dividere il numeratore pel denominatore. Il quoziente esprimerà gl'interi, ed il residuo della divisione sarà il numeratore della frazione, che accompagna questi interi. Così $\frac{27}{5}$ danno $5\ \frac{2}{5}$, cioè cinque interi, e due quinti.

In fatti, nell'espressione $\frac{27}{5}$ il denominatore 5 fa conoscere, che l'unità è composta di 5 parti: quindi quante volte il 5 si contiene in 27, altrettante unità intere si conterranno nel valore della frazione.

86. Le moltiplicazioni, e divisioni de' numeri interi uniti alle frazioni esigono almeno per la facilità dell'operazione, che si convertano questi interi in frazioni.

Si fa questa conversione moltiplicando l'intero pel denominatore della frazione, alla quale si vuol ridurre questo intero. Per esempio, se si voglia convertire 8 interi in quinti, si moltiplicherà 8 per 5; e si avrà $\frac{40}{5}$. Infatti, allorchè si vuol convertire 8 in quinti, si considera l'unità composta di 5 parti; le 8 unità dunque ne conterranno 40. Similmente $7\frac{7}{9}$ convertiti in noni danno $\frac{67}{9}$.

De' cangiamenti che si possono indurre ai termini d' una frazione, senza cangiarne il valore.

87. E' chiaro che quante più parti si concepiranno nell' unità, tanto maggiore sarà il numero di esse per comporre una data quantità.

88. Quindi si può rendere il denominatore d' una frazione doppio, triplo, qradruplo ec. senza cambiare il valore della frazione, purchè simultaneamente si renda doppio, triplo, quadruplo il numeratore.

Si può dunque dire in generale, *che una frazione non muta di valore, quando si moltiplicano i suoi termini per lo stesso numero.*

Così $\frac{3}{4}$ è lo stesso che $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ lo stesso che $\frac{3}{6}$, che $\frac{2}{4}$, è lo stesso $\frac{5}{10}$ ec.

89. Con un simile ragionamento si dimostra che qnando meno parti si suppongono nell' unità, tanto più piccolo dovrà essere il numero di esse per formare una medesima quantità; ed in conseguenza si può, senza cangiare una frazione, rendere il suo denominatore 2, 3, 4 volte più piccolo: ed in generale,

una frazione non cambia di valore, quando si dividono i suoi termini per lo stesso numero.

Per vedere distintamente la verità di queste due proposizioni, basta ricordarsi cosa è il denominatore, e cosa è il numeratore di una frazione.

Osserviamo dunque, che moltiplicare, o dividere li due termini di una frazione per lo stesso numero, non è moltiplicare, o dividere la frazione: poichè, per quel che si è detto, ella non cambia di valore con queste operazioni.

Li due principii, che abbiamo esposti, sono la base delle due riduzioni seguenti, che sono d'un grandissimo uso.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

90. 1. Per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, moltiplicate li due termini della prima per lo denominatore della seconda, e li due termini della seconda pel denominatore della prima.

Per esempio, per ridurre allo stesso denominatore le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, io moltiplic

2, e 3, che sono li termini della prima frazione per 4 denominatore della seconda, ed ho $\frac{8}{12}$ (88), che è dello stesso valore di $\frac{2}{3}$.

Moltiplico similmente li termini 3, e 4 della seconda frazione ciascuno per 3 denominatore della prima, ed ho $\frac{9}{12}$, che è dello stesso valore di $\frac{3}{4}$; di sortecchè le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ sono cangiate in $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$, che sono rispettivamente dello stesso valore delle prime, e che hanno il medesimo denominatore.

E' facile vedere, che con questo metodo il denominatore sarà sempre lo stesso per ciascuna delle nuove frazioni, poichè in ciascuna operazione il nuovo denominatore è formato dalla moltiplicazione de' due denominatori primitivi.

91. 2. Se vi sono più di due frazioni, si ridurranno tutte alla stessa denominazione moltiplicando i termini di ciascheduna per lo prodotto di tutti gli altri denominatori.

Per esempio, per ridurre allo stesso denominatore le quattro frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, io moltiplico li due termini 2 e 3 della prima per lo prodotto de' tre denominatori 4, 5, 7 delle altre frazioni, prodotto che io trovo dicendo: 4 volte 5 fanno 20; dopo 7 volte 20

fanno 140. Moltiplico dunque 2 e 3 ciascuno per 140, ed ho $\frac{280}{420}$, che è dello stesso valore di $\frac{2}{3}$ (88).

Moltiplico similmente li due termini 3 e 4 della seconda frazione pel prodotto di 3, 5, 7, prodotto che formo dicendo: 3 volte 5 fanno 15, indi 7 volte 15 fanno 105. Moltiplico dunque 3 e 4 ciascuno per 105, ed ho $\frac{315}{420}$ frazione dello stesso valore di $\frac{3}{4}$.

Passando alla terza frazione, io moltiplico il suoi due terminl 4 e 5 ciascuno per 84 prodotto de' tre denominatori 3, 4, e 7, ed ho $\frac{336}{420}$ in vece di $\frac{4}{5}$.

In fine per la quarta, io moltiplicherò 5 e 7 ciascuno per lo prodotto 60 de' denominatori 3, 4, 5 delle prime tre frazioni, ed avrò $\frac{300}{420}$ in vece di $\frac{5}{7}$; di sortecchè le quattro frazioni $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ sono cangiate in $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, meno semplici in vero delle prime, ma dello stesso valore di esse, e più suscettibili delle operazioni dell' addizione, e sottrazione, a cagione del di loro comune denominatore.

Osserviamo, che il denominatore di ciascuna nuova frazione essendo formato dal prodotto di tutti li primitivi denominatori, que-

7 *

sto nuovo denominatore non può mancare di essere lo stesso in ciascuna frazione.

Riduziene delle frazioni alle loro più semprice espressioni.

92. Una frazione è tanto più semplice, quantoppiù li suoi termini sono piccoli. Egli è sovente possibile di ridurre una frazione proposta ad essere espressa con numeri minori, e ciò allorchè il suo numeratore, ed il suo denominatore sono divisibili per uno stesso numero: siccome qnesta operazione non ne cambia punto il valore (89), è una semplificazione, che non si deve trascurare.

Ecco il processo che bisognerà seguire.

93. Si divideranno il numeratore ed il denominatore per 2, e si ripeterà questa divisione sino a che si potrà fare esattamente.

Si divideranno indi li due termini per 5, e si continuerà a dividere l' uno e l' altro per 3, sino a che questa si potrà fare.

Si farà la stessa cosa successivamente coi numeri 5, 7, 11, 13, 17, cioè coi numeri, che non hanno altro divisore, che se

stessi, o l'unità, e che si chiamano *numeri primi*.

Così la sola difficoltà, che s'incontra, è di sapere quando si potrà fare la divisione per 2, 3, 5.

I principj seguenti potranno facilitare questa ricerca:

94. Ogni numero, che termina con una cifra pari, è divisibile per 2.

Ogni numero, la di cui somma delle cifre formerà 3, o un *multiplo* di tre, cioè un numero esatto di volte 3, sarà divisibile per 3. Per esempio, 54231 è divisibile per 3, perchè le sue cifre 5, 4, 2, 3; 1 sommate fanno 15, che è 5 volte 3.

Lo stesso accade per lo numero 9, se le cifre sommate insieme danno 9, o un multiplo di 9.

Questa proprietà del numere 3 si dimostra presso a poco come quella del numero 9, e l'una, e l'altra si dimostrano come per la pruova del 9 (75),

Ogni numero terminato da 5, o da un zero è divisibile per 5.

Riguardo ai numeri 7, e sequenti, quantunque sia facile di trovare simili regole, sio-

come l'esame, che esse esigono, è lungo del pari della divisione, bisognerà tentare questa.

Proponiamo per esempio, di ridurre la frazione $\frac{2016}{5796}$. Io divido li due termini per 2, perchè le due ultime cifre di ciascuno sono pari, ed ho $\frac{1008}{2898}$. Divido ancora per 2, ed ho $\frac{504}{1449}$. Ciò che si è detto quì sopra mi dimostra, che io posso dividere per 3: divido in effetto, ed ho $\frac{168}{483}$. Divido parimenti per 3; ciò che mi dà $\frac{56}{161}$. E finalmente tento di dividere per 7; la divisione riesce esatta, ed ottengo $\frac{8}{23}$.

La ragione che ci obbliga a tentare la divisione per li numeri primi è, che dopo di avere esaurita la divisione per 2, per esempio, è inutile di tentare di dividere per 4, poichè se questa poteva riuscire, a più forte ragione si farebbe la divisione per 2.

95. Di tutti li mezzi, che si possono impiegare per ridurre una frazione ad un'espressione più semplice, il più diretto è quello di dividere li due termini per lo di loro massimo comune divisore. Ecco la regola per trovare questo massimo divisore.

Dividete il termine maggiore per lo minore, se non vi rimane residuo, sarà il più picc

solo termine il massimo comune divisore.

Se vi è un residuo, dividete il termine minore per questo residuo, e se la divisione riesce esatta, sarà questo il massimo comune divisore.

Se questa seconda divisione dà un residuo, dividete il primo residuo per lo secondo, e continuate sempre a dividere il residuo precedente pel seguente, sino a che giungiate ad una divisione esatta. Allora l' ultimo divisore, che avrete impiegato, sarà il più grande divisore dei termini della frazione.

Se l' ultimo divisore si trova essere l' unità, è una pruova che la frazione non può essere ridotta.

Prendiamo per esempio, la frazione $\frac{3760}{9024}$. Divido 9024 per 3760; ho per quoziente 2, e per residuo 1504.

Divido 3760 per 1504; ho per quoziente 2, e per residuo 752.

Divido il primo residuo 1504 pel secondo 752; la divisione riesce, e conchiudo, che 752 può dividere li termini della frazione $\frac{3709}{9024}$, e ridurla alla più semplice erpressione; che si trova, facendo l' operazione, essere $\frac{5}{12}$.

In fatti si è trovato che 752 divide 1504;

esso deve dunque dividere 3760, che si compone di due volte 1504, e di 752. Si vede ugualmente, che esso deve dividere 9024, poichè 9024 è cemposto di due volte 3760, e di 1504.

Si vede dippiù, che 752 è il massimo comune divisore de' numeri 3760, e 9024: perchè non vi può essere comune divisore tra 9024, e 3760, che non lo sia nello stesso tempo tra 3760 e 1504, e tra questi due non ve ne può essere uno, che non sia anche divisore comune di 1504, e di 752, Ma egli è evidente, che tra questi numeri non vi può essere divisore comune più grande di 752. Dunque ec.

Differenti maniere di ravvisare una frazione; conseguenze che se possono dedurre.

96. L'idea, che abbiamo data fin ora d'una frazione, è che il denominatore deve indicare di quante parti l'unità è composta, e 'l numeratore quante di queste parti si contengono nella frazione.

Si può ancora ravvisare una frazione sotto un altro punto di veduta, si può considerare

il numeratore come rappresentante una certa quantità; che deve essere divisa in tante parti, quante v' ha di unità nel denominatore. Per esempio, in $\frac{4}{5}$ si può considerare 4 come rappresentante quattro cose qualunque, 4 lire per esempio, che si cerca di dividere in cinque parti; perciocchè è chiaro, che è lo stesso dividere 4 lire in cinque parti per prenderne una, che dividere una lira in cinque parti, e prenderne 4.

97. Si può dunque considerare il numeratore di una frazione come un dividendo, ed il denominatore come un divisore:

Si vede quindi cosa significano li residui delle divisioni messi sotto la forma, che noi gli abbiamo data. (60)

98. Segue da ciò: 1 che un intiero può sempre esprimersi sotto la forma di un rotto, facendone di esso un numeratore, e dandogli l'unità per denominatore; così 8 o $\frac{8}{1}$; 5 o $\frac{5}{1}$ sono la medesima cosa.

99. 2. Che per convertire una frazione qualunque in decimali, si dovrà considerare il numeratore come il residuo d'una divisione, in cui il denominatore fa da divisore, ed operare per conseguenza come è stato detto

(pag. 67.), avvertendo di mettere prima un zero al quoziente per tenere il luogo delle unità; così si troverà che $\frac{3}{5}$ vagliono in decimali o, 6, che $\frac{5}{9}$ vagliono o, 555, ec che $\frac{1}{25}$ vale, o; o4; e così di seguito.

In questa guisa si può ridurre in decimali qualunque numero complesso proposto. Per esempio, si tratta di ridurre 3^t 5 p 8 p 7^1 in decimali di tesa; in modo da non trascurare una mezza linea. Io osservo che la tesa contiene 864 linee, e per conseguenze 1728 mezze linee: bisogna dunque, per non trascurare una mezza linea, portare l' esattezza al di là delle parti millesime, cioè sino alla diecimillesime.

Ciò posto, riduco li 5 p 8 p 7^1 tutti in linee, ed ho 823 linee o $\frac{823}{864}$ di tesa. Riducendo questa frazione in decimali, come poch' anzi si è detto, si ha o, 9525, e per conseguenza 3^t, 9525, pel numero proposto.

Delle operazioni dell' Aritmetica sulle frazioni.

100. Si fanno sulle frazioni le stesse operazioni, che su de' numeri interi. Le due prime operazioni, l' addizione, e la sottrazione

esigono il più delle volte una operazione preparatoria : le altre due non l'esigono per niente.

Dell'addizione delle frazioni.

101. Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si sommeranno tutti li numeratori, e si darà alla somma il denominatore comune delle frazioni.

Così per sommare $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, sommo li numeratori 2, 3, 5, ed ho per quoziente $\frac{10}{7}$, che riduco ad $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore, si ridurranno prima; siccome è stato detto (90) e (91), ed indi si sommeranno nel modo che è stato prescritto. Così se si vogliano sommare $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, io trarformo queste 3 frazioni nelle altre $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, la di cui somma è $\frac{133}{60}$, che si riduce a $2\frac{13}{60}$ (85).

Della sottrazione delle frazioni.

103. Se le due frazioni proposte hanno lo stesso denominatore, si toglierà il numeratore minore dal maggiore. Se si tratta di sottrar-

re $\frac{2}{9}$ da $\frac{8}{9}$, il residuo sarà $\frac{6}{9}$, che si riduce ad $\frac{2}{3}$ (93).

104. Se da 9 $\frac{5}{8}$ si volesse sottrarre $4\frac{7}{8}$, siccome non si può togliere $\frac{7}{8}$ da $\frac{5}{8}$, s'impronterà da 9 un' unità, la quale ridotta a parti ottave; ed unite queste a $\frac{5}{8}$ faranno $\frac{13}{8}$, dalle quali togliendo $\frac{7}{8}$, resteranno $\frac{6}{8}$; togliendo indi 4 da 8, rimarrà in tutto $4\frac{6}{8}$, o $4\frac{3}{4}$.

105. Se le frazioni non hanno lo stesso denominatore; vi si ridurranno prima (90) (91), e dopo si farà la sottrazione, come sopra. Così per sottrarre $\frac{2}{3}$ da $\frac{3}{4}$, io trasformo queste in $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, tolgo 8 da 9, ed il residue sarà $\frac{1}{12}$.

Della moltiplicazione delle frazioni.

106. *Per moltiplicare due frazioni, si moltiplicherà numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore.*

Per esempio, per moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, si moltiplicherà 2 per 4, che darà 8 per numeratore; si moltiplicherà 3 per 5, e si avrà 15 per denominatore; e per conseguenza $\frac{8}{15}$ per prodotto.

Per capire la ragione di questa regola, bi-

sogna ricordarsi, che moltiplicare un numero per un altro, è lo stesso che prendere il moltiplicando tante volte, quante sono le unità del moltiplicatore. Così moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, è prendere $\frac{4}{5}$ di volte la frazione $\frac{2}{3}$, o più esattamente, è prendere 4 volte la quinta parte di $\frac{2}{3}$. Or moltiplicando il denominatore 3 per 5 si cangiano li terzi in quindicesimi, cioè in parti cinque volte più piccole; e moltiplicando il numeratore 2 per 4 si prendono queste nuove parti quattro volte. Si prende dunque quattro volte la quinta parte di $\frac{2}{3}$: si moltiplica dunque $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$.

107 Se si dovesse moltiplicare un intero per una frazione, o una frazione moltiplicare per un intero, si ridurrebbe l'intero sotto la forma di rotto, dandogli l'unità per denominatore.

Per esempio se si voglia moltiplicare 9 per $\frac{4}{7}$, ciò si riduce a moltiplicare $\frac{9}{1}$ per $\frac{4}{7}$, che secondo la regola data, dà per prodotto $\frac{36}{7}$, che si rtduce a $5\frac{4}{7}$.

Si vede dunque, che per moltiplicare una frazione per un intero, o un intero per una frazione, l'operazione si riduce a moltiplicare il numeratore di questa frazione per l'intero,

108. Se vi fossero degl'interi uniti alle frazioni, bisognerebbe prima ridurre ciascun intero ad una frazione della stessa specie di quella, che l'accompagna: per esempio, se si debba moltiplicare 12 $\frac{3}{5}$ per 9 $\frac{3}{4}$, in cangio il moltiplicando in $\frac{63}{5}$, e 'l moltiplicatore in $\frac{39}{4}$ (86): moltiplico $\frac{63}{5}$ per $\frac{39}{4}$, come sopra (106), ed ottengo per prodotto $\frac{2457}{20}$, che equivalgono a 122 $\frac{17}{20}$.

Divisione delle frazioni.

109. *Per dividere una frazione per un' altra bisogna rovesciare li termini della frazione, che serve di divisore, e moltiplicare la frazione dividenda per questa rovesciata.*

Per esempio, per dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, io rovescio la frazione $\frac{2}{3}$, ed ho $\frac{3}{2}$: moltiplico $\frac{4}{5}$ per $\frac{3}{2}$, secondo la regola data (106), ed ottengo $\frac{12}{10}$ o 1 $\frac{2}{10}$ per quoziente di $\frac{4}{5}$ diviso per $\frac{2}{3}$.

Per comprendere la ragione di questa regola, bisogna osservare, che dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, è lo stesso che cercare quante volte $\frac{4}{5}$ contiene $\frac{2}{3}$. Ora è facile vedere, che poichè il divisoree è $\frac{2}{3}$, esso sarà contenuto nel dividendo

tre volte tanto, che se fosse 2 interi. Dunque bisogna dividere prima per 2, ed indi moltiplicare per 3, che vale lo stesso, che prendere tre volte la metà del dividendo, o moltiplicarlo per $\frac{3}{2}$, che è il divisore rovesciato.

110. Se si dovesse dividere una frazione per un intero, o un intero per una frazione: si dovrà mettere prima l'intero sotto la forma di frazione, dandogli l'unità per denominatore. Per esempio se si abbia 12 a dividere per $\frac{5}{7}$, l'operazione si ridurrà a dividere $\frac{12}{1}$ per $\frac{5}{7}$, che per quello che si è detto, si riduce a moltiplicare $\frac{12}{1}$ per $\frac{7}{5}$, il che dà per prodotto $\frac{84}{5}$ o $16\frac{4}{5}$.

Similmente se si dovesse dividere $\frac{3}{4}$ per 5 si ridurrebbe l'operazione a dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{1}$, cioè a moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{5}$, ciò che dà $\frac{3}{20}$.

Si vede dunque, che per dividere una frazione per un intero, l'operazione si riduce a moltiplicare il denominatore della frazione per l'intero.

111. Se vi sono degl' interi uniti alle frazioni, si ridurrà ciascuno degli interi a frazione della stessa specie di quella, che l'accompagna: per esempio, se si abbia $50\frac{3}{5}$ da dividere per $12\frac{2}{3}$, si trasformerà il dividendo

in $\frac{273}{5}$, e'l divisore in $\frac{38}{3}$, e l'operazione si ridurrà a dividere $\frac{273}{5}$ per $\frac{38}{3}$, cioé (109) a moltiplicare $\frac{273}{5}$ per $\frac{3}{38}$, ciò che darebbe $\frac{819}{190}$, o $4\frac{59}{190}$.

Alcune applicazioni delle regole precedenti.

Da quel che si è detto è facile rilevare, come si possa valutare una frazione. Si cerca per esempio, ciò che valgono $\frac{5}{7}$ di una lira. Poichè li $\frac{5}{7}$ d'una lira sono lo stesso (16) che un settimo di 5 lire, io riduco le 5 lire in soldi (57), e divido li 100 soldi che esse mi danno, per 7, ed ottengo 14 soldi per quoziente, e 2 soldi di residuo. Riduco questi due soldi in denari, e divido 24 denari per 7; ho 3 denari $\frac{1}{7}$: così li $\frac{5}{7}$ d'una lira sono 14 soldi, 3 denari, e $\frac{3}{7}$ di denaro.

Se si volessero li $\frac{5}{7}$ di 24 lire, è chiaro che si dovrebbero da principio prendere, come poc' anzi si è fatto, li $\frac{5}{7}$ di una lira, e moltiplicarli in seguito per 24: ma è più comodo di moltiplicare da principio $\frac{5}{7}$ per 24 lire, che dà (97) $\frac{120}{7}$ lire, e di valutare quindi questa ultima fraziona, che si troverà essere 17 lire, 2 soldi, 10 denari $\frac{2}{7}$.

113. Le frazioni decimali non avendo denominatori, sono più facili a valutarsi. Se si cerca, per esempio, quanto vagliono 0,532 di tesa: siccome la tesa costa di 6 piedi; io moltiplicherò 0,532 per 6, ed avrò 3,192 piedi; moltiplicando quest' ultima frazione per 12, valutando in pollici, avrò 2,304 pollici, cioè 2P e 0,304 di pollice. Finalmente molticando questa per 12, per ridurla in linee, si avrà 3 648 linee, o 3l, e o, 648 di linea; e perciò il valore della frazione o, 532 di tesa sarà 3P 2P 3l e o, 648 di linea.

114. Il modo di valutare le frazioni ci conduce naturalmente a parlare de' *rotti* di *rotti*, Si chiamano con questo nome quelle frazioni, che sono separate l' une dall' altre dall' articoli *di*: per esempio, $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{6}$, ec. sono rotti di rotti. Si riducono ad una sola frazione moltiplicandoli tra loro: di sortecchè la frazione $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ si riduce e $\frac{6}{12}$, o $\frac{1}{2}$; la frazione $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{9}$ si riduce a $\frac{30}{72}$ o $\frac{5}{12}$,

Infatti è facile vedere, che lo stesso è prendere $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, che moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$: perciocchè è lo stesso che prendere $\frac{2}{3}$ di volta la frazione $\frac{3}{4}$. Similmente prendere $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{6}$ si riduce a $\frac{30}{72}$ o $\frac{5}{12}$; e ciò che si è detto

8

fa conoscere che $\frac{6}{12}$ di $\frac{5}{6}$ si riducono a $\frac{30}{72}$ o $\frac{5}{12}$.

Se si cercasse $\frac{3}{4}$ di 5 $\frac{3}{8}$, si dovrebbe prima convertire il 5 in ottavi, e dopo si troverebbe il valore di $\frac{3}{4}$ di $\frac{43}{8}$, che sarebbe $\frac{129}{32}$ o 4 $\frac{1}{32}$;

A tutto quello che si è detto sulle frazioni aggiungiamo un esempio, che racchiude molte delle regole, che abbiamo di già stabilite.

Supponiamo che si voglia costruire una nave di 140 piedi e $\frac{2}{3}$ di lunghezza; che le distanze tra le cannoniere, compreso lo spazio tra la prima cannoniera e la scanalatura della ruota di prua, e lo spazio, tra l' ultima cannoniera e la scanalatura della ruota di poppa, eguaglino 108 $\frac{3}{4}$ piedi: si cerca se si possono aprire 12 cannoniere alla prima batteria di ciascun bordo.

Da 140 piedi $\frac{2}{3}$ io sottraggo 108 $\frac{3}{4}$ (103 *e seguenti*), mi restano 31 $\frac{11}{12}$ per le cannoniere: divido 31 $\frac{11}{12}$ per 12, cioè, $\frac{383}{12}$ per $\frac{12}{1}$ (86) e (110), ed ho per quoziente $\frac{383}{144}$ di piede, che equivalgono a 2 piedi e $\frac{95}{144}$, frazione, che valutata in pollici e linee, dà 7 pollici, ed 11 linee. Quindi bisognerebbe dare a ciascuna cannoniera 2 piedi, 7 pollici, ed 11 linee, cioè 2 piedi ed 8 pollici circa;

misura conveniente per un vascello di 140 piedi e $\frac{2}{3}$.

115. Allorchè una frazione espressa con numeri un poco considerevoli, non è riducibile col metodo dato (95), e che basta averne un valore approssimante, vi si può pervenire col metodo seguente, che dà alternativamente delle frazioni più grandi e più piccole della data, ma sempre di più in più approssimanti, di sortecchè coll' ultima operazione si ottiene la frazione proposta. Prendiamo per esempio, la frazione $\frac{100000}{314159}$, che, come si vedrà in Geometria, esprime il rapporto molto approssimante del diametro alla circonferenza; e proponiamoci di esprimere questa frazione con altre frazioni meno esatte, ma espresse con numeri più semplici.

Dividete il numeratore, e 'l denominatore pel numeratore, ed avrete $\frac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Per avere un primo valore approssimante, trascurate la frazione che accompagna 3, ed avrete $\frac{1}{3}$ per primo valore prossimo, ma un poco troppo grande.

Per avere un valore più approssimante, dividete il numeratore ed il denominatore della

frazione che accompagna 3, ciascuno per lo numeratore di questa frazione ed avrete

$$\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\frac{887}{14159}}}$$

trascurate la frazione, che accompagna 7, ed avrete $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, o (86) $\cfrac{1}{\frac{22}{7}}$, o (109) $\frac{7}{22}$ per secondo valore, che è più approssimante del primo, ma un poco troppo piccolo.

Per avere un valore ancora più approssimante, dividete li due termini della frazione, che accompagnano 7, ciascuno pel numeratore di questa frazione, ed avrete

$$\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{15\,\frac{854}{887}}}}$$

$$1\,\frac{33}{854}$$

sopprimete la frazione che accompagna 15, ed avrete

$$\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{15\,\frac{854}{887}}}}$$

la quale si riduce a $\frac{106}{333}$, valore più prossimo, ma un poco troppo grande.

De' numeri complessi.

116. Quantunque le regole, che abbiamo sin' ora esposte, possano servire anche a calcolare li numeri complessi, noi crediamo però dover considerare questi d'una maniera più particolare, perchè il loro calcolo resta sovente facilitato dalla divisione, che si fa dell' unità principale.

Vi sono molte specie di numeri complessi, e le regole per calcolarli dipendono molto dalla divisione, che si è fatta dell' unità. Intanto non è necessario di esaminare tutte queste specie per essere nello stato di calcolarle; ma importa sapere quali rapporti abbiano le parti tanto tra loro, quanto coll' unità principale: ecco perchè noi rapportiamo qui una tavola de' numeri complessi i più usitati.

TAVOLA

DELLE UNITA' DI ALCUNE SPECIE, E DE' CARATTERI, CO' QUALI SI RAPPRESNTANO QUESTE DIFFERENTI UNITA'.

Per le Monete.

L significa . . . . lira	1 lira vale . . 20 soldi
S . . . . soldo	1 soldo vale . . 12 denari

Per li pesi.

I Significa . . . . libbra	1 libra (peso) vale 2 marchi
M . . . . Marco	1 Marco . . . 8. once
O o ℥ . . . . . Oncia	1 Oncia . . . 8. Grossi
G o ʒ . . . . . Grosso	1 grosso 3 denari, ò scrupoli
D,o ϶ denaro,o scrupolo grano	1 denaro . . 24 grani

Per l' estensione delle linee.

T Significa . . . tesa	1 tesa vale . . . 6 piedi
P . . . . piede	1 piede . . . 12 pollici

p . . . . pollice	1 pollice . . .	12 linee
l . . . . linea	1 linea . . .	12 punti
pt . . . . punto		

Per lo tempo.

g significa . . . giorno	1 giorno vale..	24 ore
o . . . . Ora	1 ora . . .	60 minuti
, ... minuto	1 minuto. .	60 secondi
" . . . . secondo	1 secondo . . .	60 terzi

Noi daremo in Geometria le divisioni delle misure relative alle superficie, ed alle capacità de' corpi.

Addizione de' numeri complessi.

117. Per fare questa operazione, si scrivono i numeri proposti gli uni sotto degli altri, di modocchè tutte le parti della medesima specie si trovino in una stessa colonna verticale, e dopo di aver tirata sotto una linea, si comincia l'addizione dalle parti della specie più piccola. Se la loro somma non compone un'unità della specie immediatamente superiore, si scrive sotto delle unità della sua

specie; se essa compone una o più unità della specie superiore, si scrive sotto di questa colonna l'eccesso su queste unità di questa seconda specie, e si ritengono le unità di questa seconda specie per aggiungerle alle loro simili: e così si precederà per le altre.

E S E M P I O I.

Si proponga di sommare

227^{l}	14^{s}	8^{d}
2549	18	5
184	11	11
17	10	7
2979^{l}	15^{s}	7^{d}

La somma de' denari è 31, che contiene 2 dozzine di denari, o 2 soldi e 7 denari: io scrivo li 7 denari, e ritengo 2 soldi, che aggiungo alle unità de' soldi, ed ho 15 soldi, di cui scrivo solamente 5, e ritengo la decina per unirla alle decine, ed ho 5; e siccome bisognano 2 decine di soldi per fare una lira, io prendo la metà di 5, che è 2 con 1 di resto; scrivo questo residuo, e porto le due lire alla colonna delle lire, le quali le sommo come al solito.

ESEMPIO II.

Si proponga di sommare

54^t	2^p	5^p	9^l
12	5	4	11
9	4	11	12
8	2	9	10
85^t	3^p	6^p	5^l

La somma delle linee ascende a 41, che fanno 3 pollici e 5 linee: io scrivo 5 linee, e ritengo li 3 pollici, li quali sommo co' i pollici, ed ho 30, che vagliono 2 piedi e 6 pollici. Scrivo li 6 pollici, e ritengo li 2 piedi, li quali uniti co' i piedi mi danno 15 piedi, che equivalgono a 2^t 3^p. Scrivo li 3^p, e unisco le due tese colle tese, il che mi dà 85^t disortecchè 85^t 3^p 5^p 5^l 6^{pt} è la somma ricercata.

Sottrazione de' numeri complessi

118. Scrivete li numeri proposti come nell' addizione, e cominciate la sottrazione dalle unità della specie più bassa.

Se il numero inferiore si può sottrarre dal numero superiore, scrivete il residuo sotto. Se non si può sottrarre, improntate dalla specie immediatamente superiore una unità, che ridurrete alla specie, di cui si tratta, e che aggiungerete al numero, da cui non potete sottrarre. Fate le stesso per ciascuna specie; e quando siate stato obbligato d'improntare, diminuite d'un'unità il numero, sul quale avete fatto questo impronto. Finalmente scrivete ciascun residuo, a misura che lo troverete, sotto del numero, che l'ha dato.

ESEMPIO I.

Da	143^{l}	17^{s}	6^{d}
Si vuol sottrarre . . .	75^{l}	12^{s}	9^{d}
	68^{l}	4^{s}	9^{d} residuo

Non potendo togliere 9^{d} da 6^{d}, io impronto 1^{s} che vale 12^{d}, e 6 fanno 18, dai quali togliendo 9, rimane 9. Tolgo in seguito 12 non da, 17 ma da 16, che rimangono dopo l'imprestito, e rimane 4. Finalmente sottraggo 75 lire da 143 lire, e rimangono 68. lire.

ESEMPIO II.

Da	163^l 0^s 5^d
Si vuol togliere.	84^l 18^s 9^d
	78^l 1^s 8^d residuo

Siccome non posso togliere 9^d da 5^d, e d' altronde non vi sono soldi, su i quali possa farsi l'impronto, io imprónto 1 lira da 163 lire, ma lascio col pensiero 19 soldi nel luogo del zero, dopo di che, opero come sopra.

Moltiplicazione de' numeri complessi.

119. La moltiplicazione da' numeri complessi si può ridurre generalmente alla moltiplicazione di una frazione per un' altra, secondo la regola data (106). Per esempio, se si cerca quanto debbono costare 54^t 3^p d'opera, a ragione di 42^l lire, 17 soldi, e 8 denari la tesa; si può ridurre il moltiplicando 42 lire 17 soldi e 8 denari tutto in denari (57); il quale darà 10292 denari; e siccome il denaro, è la 240^{ma} parte della lira, il moltiplicando

potrà essere espresso da $\frac{10292}{240}$ delle lira. Similmente si ridurrà il moltiplicatore $54^t\ 3^p$ tutto in piedi, che dà 327^p; e perchè il piede è la sesta parte della tesa, si avrà per moltiplicatore $\frac{327}{6}$ di tesa; di sortecchè la quistione si riduce a moltiplicare $\frac{10292}{240}$ di lira per $\frac{328}{6}$, il che darà (106) $\frac{3365484}{1440}$ di lira, che (112) equivagliono a 2337 lire 2 soldi e 10 denari.

Questo metodo si estende a tutte le specie di numeri complessi: ma esso esige più calcolo di quello, che ora esporremo: e perciò non ci fermeremo di vantaggio.

120. Un numero che è contenuto esattamente in un altro, si chiama *aliquota* di questo secondo: così, 3 è parte aliquota di 12; 2 l'è di 4 e di 6.

Ricordiamoci che moltiplicare non essendo, che ripetere il moltiplicando un certo numero di volte; moltiplicare per $8\frac{3}{4}$, per esempio, è prendere il moltiplicando 8 volte, e prenderlo ancora $\frac{3}{4}$ di volte, o prenderne li $\frac{3}{4}$. Or si può prendere $\frac{3}{4}$ o prendendo da principio un quarto, e scrivendolo 3 volte, o vero prendendone da prima la metà, ed indi la metà di questa metà: così per moltiplicare 84 per $8\frac{3}{4}$.

Scrivo

$$\begin{array}{r} 84 \\ 8\,\frac{3}{4} \\ \hline 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ prodotto

Moltiplicando 84 per 8, io avrei subito 672: inseguito, per prendere li $\frac{3}{4}$ di 84, io prenderò prima la metà, che è 42; e dopo per prendere il quarto restante, prenderò la metà di 42, che è 21, e riunendo questi tre prodotti particolari, avrò 735 per prodotto totale.

121. Per applicare questa regola ai numeri complessi, bisogna osservare che le differenti specie d' unità al di sotto dell' unità principale, sono delle frazioni le une rispetto alle altre, e rispetto a questa unità principale; e per conseguenza per moltiplicare facilmente per questa specie di numeri, bisogna decomporli in parti aliquote dell' unità principale, di maniera che queste aliquote possano essere impiegate comodamente; o di decomporli in parti aliquote le une rispetto alle altre; e se

questa decomposizione non dà parti aliquote, che siano comode nel calcolo, vi si supplirà con de' falsi prodotti: che è quello, che ora svilupperemo cogli esempj seguenti.

ESEMPIO I.

Si dimanda quanto debbono costare $54^t\ 3^p$ a ragione di 72 lire la tesa?

Bisogna moltiplicare	72^l
per	$54^t\ 3^p$
	$288^l\ 0^s\ 0^d$
	360
	36
	$3924^l\ 0^s\ 0^d$

Si moltiplicherà prima, secondo le regole ordinarie 72 lire per 54. In seguito per moltiplicare per 3^p, che sono la metà della tesa, e che per conseguenza debbono dare la metà del prezzo della tesa, si prenderà la metà di 72 lire, e sommando, si avrà 3924^l per prodotto totale.

ESEMPIO II.

Se si abbia 72^l
da moltiplicare per 54^t 5^p

288 o o
360
36
42

39481 o o

Si moltiplicherà prima 72 lire per 54: indi in vece di moltiplicare per $\frac{5}{6}$ della tesa, si decomporrà 5^p in 3 e 2, di cui il primo è la metà, ed il secondo $\frac{1}{3}$ della tesa: si prenderà dunque prima la metà di 72 lire, ed indi il terzo di 72 lire, e si avrà riunendo tutti questi prodotti particolari, 3948 lire per prodotto totale.

122. Se il moltiplicando è anche un numero complesso, si terrà la regola seguente.

E S E M P I O IV.

Se si abbia	72^{l}	6^{s}	6^{d}
a moltiplicare per	27^{t}	4^{p}	8^{p}
	504	0	0
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009	0	$6\frac{2}{3}$

Si moltiplicherà prima 72 lire per 27. Indi per moltiplicare 6 soldi per 27, si decomporranno questi 6 soldi in 5 soldi, ed 1 soldo. Li 5 soldi essendo un quarto di una lira, moltiplicandosi per 27, daranno 27 volte il quarto di lira, o il quarto di 27 lire: si prenderà dunque il quarto di 27 lire; che è

6 lire e 15 soldi. Per moltiplicare 1 soldo per 27, si osserverà che un soldo è la quinta parte di 5, che si è moltiplicato; così si prenderà il quinto di 6 lire, e 15 soldi, che sarà 1 lira e 7 soldi.

Riguardo a i 6 denari, si rifletta, che questi sono la metà di un soldo, e per conseguenza si prenderà la metà di 1 lira e 7 soldi, che si è avuto per un soldo. Sin quì tutto il moltiplicando è moltiplicato per 27.

Per moltiplicare per 4 piedi, si procederà nella stessa maniera dell'esempio antecedente, cioè che per li 4p si prenderà prima per 3, la metà di 36 lire 3 soldi, 3 denari del moltiplicando, e per 1 il terzo di quello che danno li 3p

Finalmente per 8p, si moltiplicherà 2 volte per 4, cioè, si scriverà 2 volte il terzo di ciò che si è avuto per un piede; riunendo tutte queste differenti parti, si avranno 2009 lire, 0 soldi, 0 denari, e $\frac{3}{4}$ per prodotto totale.

123. Sin quì le parti del moltiplicando, che si sono prese, sono state assai facili a valutarsi; ma nel caso in cui queste parti siano più composte, si farà quel che siegue.

ESEMPIO V.

A ragione di . . . . 34^l 10^t 2^d la tesa
Quando debbono costare, $17.^s$

138	0	0
34		
8	10	
0	2	10
586^l	12^s	10^d

Dopo di aver moltiplicato 34^l lire, ed in seguito li 10 soldi per 17, prendendo la metà di 17, si moltiplicheranno 2 denari, che sono la sesta parte di un soldo, e per conseguenza la sesta parte della decima parte, o (114) la 60 parte di 10 soldi: sarà più facile di fare un falso prodotto, e di prendere prima il decimo di ciò che hanno dato 10 soldi, cioè il decimo di 8 lire e 10 soldi: questo decimo, che è o lire, è 17 soldi, è per uno soldo. Ma come vi bisogna il sesto di un soldo, si casserà questo falso prodotto, e si scriverà il sesto al di sotto.

ESEMPIO VI.

Quanto per 34 lire 10 soldi e 2 denari si farà di opera, a ragione di 1 lira per 17 tese?

Bisogna moltiplicare 17 tese per 34 lire 10 soldi 2 denari, cioè prendere 24 tese tante volte, quante volte una lire è contenuta in 34 lire 10 soldi e 2 denari.

$$
\begin{array}{llllll}
 & 17^t & & & & \\
 & 34^l & 10^s & 2^d & & \\
\hline
 & 68^l & 0^p & 0^p & 0^t & 0^{pt} \\
51 & & & & & \\
 & 8 & 3 & & & \\
 & 0 & 0 & 10 & 2 & 4\frac{4}{5} \\
\hline
 & 586^t & 3^p & 10^p & 2^l & 4^{pt}\frac{4}{5}
\end{array}
$$

Così, si moltiplicheranno prima 17 tese per 54; indi per moltiplicare 17 tese per 10 soldi, si prenderà la metà di 17 tese, perchè 10 soldi fanno la metà della lira, e si avranno 8 tese e 3 piedi. Per moltiplicare per due denari, si cercherà per maggiore fa-

cilità ciò che darebbe un soldo, prendendo il decimo di quello che han dato 10 soldi. Questo decimo è o tese, 5 piedi, 1 pollice, 2 linee, 4 punti, e $\frac{8}{10}$ o $\frac{4}{5}$ di punto.

Si casserà come se non dovesse far parte del prodotto; ma se ne prenderà il sesto, per avere il prodotto di 2 denari, e si scriverà sotto questo sesto, che è o tese, o piedi, 10 pollici, 2 linee, 4 punti e $\frac{24}{30}$ o $\frac{4}{5}$.

Abbiamo dato questo esempio principalmente per confermare quello, che abbiamo detto (45), che importa distinguere il moltiplicando dal moltiplicatore, allorchè sono tutti due concreti. In fatti, nell' esempio precedente, come in questo, i fattori del prodotto sono egualmente 17 tese, e 34 lire, 10 soldi, e 2 denari: fra di tanto li due prodotti sono differenti.

Divisione d' un numero complesso per un numero incomplesso.

124. Se il dividendo solo è complesso, e se nello stesso tempo il dividendo, ed il divisore hanno delle unità di differenti specie, si divideranno prima le unità principali del di-

videndo secondo la regola ordinaria: quello che resterà di questa divisione, si ridurrà (57) in unità della seconda specie, che si sommeranno con quelle della medesima specie, che si troveranno nel dividendo, e si dividerà il tutto come all'ordinario. Si ridurrà similmente il residuo di questa divisione in unità della terza specie, alle quali si uniranno quelle della stessa specie, che si troveranno nel dividendo, e si dividerà il tutto come sopra. Si continuerà a ridurre li residui in unità della specie seguente, sino a che se ne troveranno di specie inferiore nel divideudo.

ESEMPIO.

Si sono date 4783 lire, 3 soldi, 9 denari per pagamento di 87 tese di opera; si cerca a quanto viene la tesa?

```
4783l 3s 9d | 87
433         |--------------
 85         | 54  19  7
-----
1703
 833
  50
-----
 609
 000
```

Bisogna dividere 4783 lire, 3 soldi, 9 denari per 87, cominciando dalle lire.

Le 4783 lire divise per 87, secondo la regola ordinaria, danno 54 lire per quoziente, ed 85 lire per residuo. Queste 85 lire ridotte in soldi (57), daranno co' tre soldi del dividendo 1703 soldi, li quali divisi per 87, danno 19 soldi per quoziente, e 50 soldi per residuo. Questi 50 soldi ridotti in denari, danno colli 9 denari del dividendo, 609 denari, li quali divisi per 87, danno finalmente 7 denari per quoziente.

125. Ma se il dividendo, e 'l divisore hanno delle unità della stessa specie, bisogna prima di fare la divisione, esaminare se il quoziente debba essere o no della medesima di lo-

ro specie: ciò che viene sempre determinato dallo stato della quistione.

126. Quando il dividendo, e 'l divisore, essendo della medesima specie, portano il quoto anche della stessa specie, la divisione si farà precisamente, come nel caso precedente: per esempio, se si proponesse questa quistione: 1243 lire han prodotto un benefizio di 7454 lire; quanto viene per lira? Egli è chiaro, che il quoziente deve avere le unità della stessa specie del dividendo, e del divisore, cioè deve essere di lire, e che si debbono dividere 7254 lire per 1243, riducendo come nell'esempio precedente il residuo di questa divisione in soldi, ed il secondo residuo in denari; e si avranno 5 lire, 16 soldi, 8 denari, e $\frac{260}{1243}$ quantità cercata.

127. Ma allorchè il dividendo, e 'l divisore essendo della medesima specie, il quoziente debba essere di specie diversa; allora bisognerà ridurre prima il dividendo, e 'l divisore alla più piccola specie, che vi è nel dividendo, ed indi fare la divisione come nel caso precedente, e si tratteranno le unità del dividendo, come se fossero della medesima specie di uelle del quoto. Per esempio se si propones-

se questa quistione : per 7954 lire 11 soldi 7 denari, quanta opèra si potrà fare a ragione di 72 lire la tesa? E' chiaro, per la natura della quistione, che il quoziente debba essere di tese, e parti di tese. Si ridurranno dunque le 7954 lire, 11 soldi, e 7 denari, tutti in denari, e si avranno 1909099: si ridurranno similmente le 72 lire in denari, e si avrà 17280. Si dividerà 1909099 considerato come tese, per 17280, e si avrà per quoziente $110^t\ 2^p\ 10^p\ 6^l\ \frac{12}{20}$.

Divisione di un numero complesso per un numero complesso.

128. Allorchè il divisore è anche un numero complesso, bisogna ridurlo alla sua più piccola specie (57); moltiplicare il dividendo per lo numero, che esprime quante parti bisognano della più piccola specie del divisore, per comporre l' unità principale di questo medesimo divisore: allora la divisione sarà ridotta al caso precedente, in cui il divisore era incomplesso.

Le 62552 lire divise per 4169 danno 14 lire per quoziente, e 3186 per residuo.

Queste 3186 lire ridotte in soldi, danno colli 10 soldi del dividendo 63730 soldi, li quali divisi per 4169, danno 15 soldi per quoziente, e 1195 soldi di residuo.

Questi 1195 soldi ridotti in denari, vagliono 14340 denari, li quali divisi per 4169, danno 3 denari per quoziente, e 1833 denari per residuo; di sortecchè il quoziento è 14 lire, 15 soldi, 3 denari, e $\frac{1833}{4169}$ di denare.

Per capire la ragione di questa regola, fa d' uopo riflettere, che le 57^t, 5^p, 5^p valendo 4169^p; ed il pollice essendo la sessantesima parte della tesa, il divisore è $\frac{4169}{72}$. Or per dividerlo per una frazioue, bisogna (109) rovesciare il divisore, e moltiplicare in seguito per questo; bisogna dunque in questo caso moltiplicare per $\frac{72}{4169}$; il che si riduce a moltiplicare prima per 72, ed indi dividere per 4169, come prescrive la regola, che abbiamo data.

Siccome la divisione per un numero complesso si riduce, come si è veduto, alla divisione per un numero incomplesso; si debbo-

no osservare in questo caso le stesse avvertenze riguardo alla natura delle unità, che abbiamo avuto (126) e (127).

Sarebbe quì il luogo di parlare della misura delle figure, o della moltiplicazione, e divisione geometrica. Queste operazioni non differiscono per nulla riguardo al processo da quelle, che abbiamo esposte; di sortecchè non si dovrebbe altra cosa aggiungervi, che la spiegazione della natura delle unità de' fattori, e del prodotto: ma questo appartiene alla Geometria. Noi differiremo di parlarne sino a che saremo giunti alla Geometria.

Della formazione de' numeri quadrati, e nell' estrazione delle loro radici.

129. Si chiama *quadrato* d' un numero, il prodotto, che nasce dalla moltiplicazione di questo numero per se stesso: così 25 è il quadrato di 5, perchè risulta dalla moltiplicazione di 5 per 5.

230. Si chiama radice quadrata d' un numero, quel numero, che moltiplicato per se stesso, riproduce il primo: così 5 è la radice quadrata di 25; 7 è la radice quadrata di 49.

131. Il quadrato d' un numero è dunque nello stesso tempo moltiplicando, e moltiplicatore: egli è dunque due volte fattore del prodotto: e per qnesta ragione si chiama la *seconda potenza* d' un numero.

Per innalzare un numero a quadrato, non bisogna far altro, che moltiplicarlo per se stesso; per estrarre la radice quadrata da un numero, cioè passare dal quadrato alla radice, vi bisogna un metodo, almeno quando si tratta d' un quadrato espresso da più di due cifre.

Quando il numero proposto ha una o due cifre, la sua radice in numero intero è uno de' numeri.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
di cui i quadrati sono.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Così la radice quadrata di 72, per esempio, è 8 in numero intero, perchè 72 essendo tra 64 e 81, la sua radice è tra 8 e 9; ella è 8, e una frazione, la quale non si può esattamente assegnare; ma che si può approssimare continuamente, come vedremo tra poco.

132 13 La radice quadrata d'un numero, che non è quadrato perfetto, si chiama numero *sordo*, o *irrazionale*, o *incommensurabile*.

133. Passiamo a i numeri, che hanno più di due cifre.

Osservando ciò che accade nella formazione del quadrato, troveremo il metodo, che si deve tenere per estrarre la radice.

Per quadrare il numero 54, per esempio.

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Dopo di avere scritto il moltiplicando, ed il moltiplicatore, come si vede quì, si moltiplichi, come all'ordinario, il 4 suporiore per lo 4 inferiore, e si otterrà evidentemente il *quadrato delle unità*.

Si moltiplichi in seguito il 5 superiore per lo 4 inferiore, e si avrà il *prodotto delle decine per le unità*.

Indi passando alla seconda cifra del moltiplicatore; si moltiplichi 4 per 5, e si avrà il prodotto delle unità per le decine, o (44) *il prodotto delle decine per le unità*.

Finalmente si moltiplichi 5 per 5, e si avrà *il quadrato delle decine*.

Si sommino questi prodotti, e si avrà per quadrato il numero 2916, il quale è composto *del quadrato delle decine*, *più due volte il prodotto delle decine per le unità*, *più il quadrato delle unità* del numero 54.

134. Quello, che si è osservato, essendo una conseguenza immediata delle regole della moltiplicazione, appartiene a qualunque numero composto di decine, e di unità; di manieracchè si può dire generalmente, che il quadrato di un numero composto di decine, e di unità, contiene le tre parti enunciate; cioè, il quadrato delle decine, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità.

135. Ciò posto, siccome il quadrato delle decine contiene centinaja, (poichè 10 volte, dieci, fa 100), è chiaro che questo quadrato non può far parte delle due ultime cifre del quadrato totale.

Similmente il doppio prodotto delle decine per le unità, essendo necessariamente di decine, non può far parte dell' ultima cifra del quadrato totale.

136. Quindi per ritornare dal quadrato 2916 alla sua radice, si può ragionare così.

ESEMPIO I.

2916	54 sadice
416	
104	
100	

Si trovino prima le decine di questa radice: or la formazione del quadrato c' insegna, che in 2916 vi è il quadrato di questa decina, e che questo quadrato non può far parte delle due ultime cifre: esso è dunque in 29: e come la radice quadrata di 29 non può essere più di 5, si conchiude che il numero delle decine della radice è 5, la quale si scrive a lato di 2916, come si vede qui sopra.

Si faccia il quadrato di 5, ed il prodotto 25 si sottragga da 29; rimane 4; a fianca del quale abbasso le due altre cifre 16 del numero proposto 2916.

Per trovare ora le unità della radice, si rifletta a ciò, che racchiude il residuo 416; esso contiene due parti del quadrato, cioè il

doppio delle decine della radice moltiplicate per le unità, ed il quadrato delle unità di questa stessa radice. Di queste due parti la prima basta per far trovare le unità, che si cercano: e poich' essa è formata dal doppio delle decine moltiplicate per le unità, se si divide pel doppio delle decine, che si conoscono, si avranno per quoziente le unità (74). Si tratta dunque di sapere in qual parte di 416 si contiene questo doppio delle decine moltiplicato per le unità. Ora si è quì sopra osservato, che esso non poteva far parte dell' ultima cifra; sarà dunque in 41; bisognerà perciò dividere 41 per lo doppio 10 delle decine trovate.

Si scrive dunque sotto di 41 il doppio 10 delle decine, e dividendo, il quoziente 4, che si ottiene, è il numero delle unità, le quali si scrivono alla dritta di 5; di sottecchè 54 è la radice richiesta.

Bisogna quì osservare, che quantunque il quoziente 4 ritrovato sia quello che conviene, pure può avvenire che il quoziente trovato con questo metodo sia più grande del giusto; perchè 41 (cioè la parte, che rimane dopo la separazione dell' ultima cifra), racchiude

non solamente il dippiù delle decine moltiplicato per le unità, ma ancora le decine provenienti del quadrato delle unità; e perciò per ovviare a qualunque dubbio sulle cifre delle unità, bisogna usare la seguente verificazione.

Dopo di essersi trovata la cifra 4 delle unità, e di averla scritta alla radice, si porti a lato del doppio 10 delle decine, che dà 104, di cui si moltiplichino successivamente tutte le cifre per lo stesso numero 4, e si sottraggano li prodotti successivi delle parti corrispondenti di 416; e siccome non resta niente, si conchiude che l' effettiva radice è 54.

Se resta qualche cosa, pure la radice sarebbe la vera in numeri interi, a meno che questo residuo non fosse più grande del doppio della radice accresciuto di un' unità; ma non è da temersi ciò, quando si prende il quoziente sempre più grande.

Questa verificazione è fondata sulla formazione stessa del quadrato: perciocchè, quando si moltiplica 104 per 4, si vede che si forma il quadrato delle unità, ed il doppio prodotto delle decine moltiplicate per le unità, vale a dire, ciò che completa il quadrato perfetto.

137. Da quel che si è detto si conchiude, che per estrarre la radice quadrata da un numero, che non ha più di quattro cifre, nè meno di tre, dopo di averne separate due sulla dritta, bisogna cercare la radice quadrata della classe, che è a sinistra: questa radice esprimerà il numero delle decine della radice totale cercata, e si scriverà a lato del numero posposto, separandolo con un tratto.

Si sottrarrà da questa medesima classe il quadrato della radice ritrovata, e dopo di avere scritto sotto di questa classe il residuo, si abbasseranno a lato di questo residuo le due cifre, che si erano separate.

Si separerà con un punto la cifra delle unità della classe, che si è abbassata, e si dividerà quella che si troverà sulla sinistra per lo doppio delle decine, e si scriverà al di sotto,

Si scriverà il quoziente a lato della prima cifra della radice, e si porterà in seguito a fianco del doppio delle decine, che è servita da divisiore.

Finalmente si moltiplicheranno per questo stesso quoziente tutte le cifre, che si troveranno su questa ultima linea, e si sottrarranno i loro prodotti a misura che si troveranno le

cifre, che loro corrisponderanno nella linea di sopra.

Si compisca di rischiarare ciò con un esempio.

ESEMPIO I.

Si cerca la radice quadrata di 7569.

75 . 6·8 87 radice
11 . 6.9
1 . 6 7
————
0 0 0

Io separo le due cifre 69 e cerco la radice quadrata di 75, che è 8; scrivo 8 a fianco, ne fo il quadrato, lo sottraggo da 75. Rimane 11, il quale scrivo sotto di 75, ed abbasso a lato dello stesso 11 le cifre 69, che io aveva separate.

Separo in 1169 l'ultima cifra 9, per avere in 116 la parte, che debbo dividere per trovare le unità.

Formo il divisore raddoppiando le 8 decine, che ho trovate, e scrivo questo divisore sot-

to 116. La divisione mi dà per quoziente 7, che io scrivo alla radice a dritta di 8.

Porto inoltre questo quoziente a lato del divisore 16; moltiplico 167, che forma l'ultima linea per questo medesimo quoziente 7, e sottraggo li prodotti, a misura che li trovo, da 1169. Non rimane nulla, il che prova che 7569 è li quadrato perfetto di 87.

138. Bisogna osservare, che si deve dividere per lo doppio delle dicine la sola parte che rimane a sinistra, dopo che si è separata l'ultima cifra, di sortecchè se essa non contenesse il doppio delle decine, non bisognerebbe perciò impiegare la cifra separata; e si metterebbe zero alla radice. Se al contrario si trovasse che il doppio delle decine è più di 9 volte, non si scriverebbe più di 9: la ragione di ciò è la stessa di quella della divisione (66).

139. Dopo di essersi ben capito quello, che abbiamo detto sulla radice quadrata de' numeri, che non hanno più di quattro cifre, si comprenderà facilmente ciò che conviene fare allorchè il numero delle cifre è più grande. Qualunque sia il numero delle cifre,

da cui dovrà essere espressa la radice, si può sempre concepire composta di due parti, di cui l'una sia di decine, e l'altra di unità: per esempio, 874 può essere considerato come rappresentante 87 decine, e 4 unità.

Ciò posto, quando si sono trovate le due prime cifre della radice col metodo ora esposto, si può trovare anche la terza collo stesso metodo, considerando queste prime due cifre come se formassero un sol numero di decine, ed applicando loro, per trovare la terza, tuttociò, che è stato detto della prima per trovare la seconda.

Similmente, quando si saranno trovate le tre prime cifre, se ve ne dovrà essere una quarta, si considereranno le prime tre, come se formassero un sol numero di decine, al quale si applicherà, per trovare la quarta, lo stesso ragionamento impiegato alle due prime per trovare la terza, e così di seguito.

Ma por procedere con ordine, bisogna cominciare dal dividere il numero proposto in classi di due cifre l'una da dritta a sinistra, l'ultima potrà contenerne anche una.

La ragione di questa preparazione si è, che considerando la radice come composta di de-

cine, e di unità, bisogna, per quello che si è detto qui sopra (155 e seguenti) cominciare dal separare le due ultime cifre a dritta, per avere, nella parte che rimane a sinistra, il quadrato delle decine. Ma perchè questa parte è anche essa composta di più di due cifre, un simile ragionamento conduce a farne separare ancora due sulla dritta, e così di seguito.

Diamo un esempio di questa operazione.

ESEMPIO III.

Si dimanda la radice quadrata di 76807696

```
76. 80. 76. 96 | 8764
128, 0
 16, 7
──────────
1117. 6
 174 6
──────────
 7009 6
 2752 4
──────────
 0000 0
```

Dopo di aver diviso il numero proposto in classi binarie da dritta a sinistra, io cerco qual'è la radice quadrata della classe 76, che è la più a sinistra: trovo che essa è 8, e lo scrivo a fianco del numero proposto. Sottraggo il quadrato di 8 da 76, ed ho per residuo 12, che scrivo sotto di 76: a lato di questo residuo abbasso la classe 80, di cui ne separo l'ultima cifra con un punto; e sotto della parte 128 io scrivo 16 doppio della radice, trovata. Indi dicendo, in 128 quante volte entra 16? Io trovo che entra 7 volte: scrivo 7 appresso alla radice 8 ed a lato del doppio 16. Moltiplico 167 per 7, ed il prodotto lo sottraggo da 1280; rimane 111, a lato del quale abbasso la classe 76, il che forma 11176. Io separo l'ultima cifra 6 di questo numero, e sotto la parte 1117, che resta a sinistra, scrivo 174, doppio della radice 87. Divido 1117 per 174, ed avendo trovato 6 per quoziente scrivo 6 alla radice a lato del doppio 174. Moltiplico 1746 per l'istesso 6, sottraggo il residuo 700 da 11176. A lato di questo residuo abbasso 96, di cui separo l'ultima cifra: sotto di 7009, che resta a sinistra, io scrivo 1752 doppio della radice trovata 876, e dividendo 7009 per

1752, trovo 4 per quoziente, il quale lo scrivo alla radice a fianco del doppio 1752. Moltiplico 17524 per questo medesimo numero 4, e lo sottraggo da 70096; non resta niente: così la radice quadrata di 76807696 è esattamente 8764.

140. Quando il numero proposto non è un quadrato perfetto, vi è un residuo alla fine dell'operazione, e la radice quadrata, che si è trovata, è la radice quadrata del più gran quadrato contenuto nel numero proposto: allora non è possibile estrarre la radice quadrata esattamente; ma si può portare l'approssimazione sin dove piace, cioè di maniera che l'errore, che ne risulta nel quadrato sia al di sotto di quella quantità che si vorrà.

Questa approssimazione si fa comodamente per mezzo de' decimali. Bisogna supporre al seguito del numero proposto tanti zeri, quant'è il doppio de' caratteri decimali, che si vogliono nella radice; fare l'operazione come all'ordinario, e separare quindi con una virgola sulla dritta della radice tanti decimali, quant'è la metà de' zeri messi appresso del numero proposto. In fatti, (54) il prodotto dovendo avere tanti ca-

ratteri decimali, quanti ve ne sono in ambi i fattori, il quadrato (di cui i fattori sono eguali) dovrà averne il doppio di quelli, che ne ha ciascuno de' fattori, cioè il doppio di quelli della radice.

ESEMPIO.

Si dimanda la radice quadrata di 87567 meno una millesima circa.

Per fare delle millesime vi bisognano tre decimali; bisogna dunque mettere sei zeri al quadrato 87567; e quindi bisogna estrarre la radice quadrata da 87567000000.

8 . 75 . 67 . 00 . 00 . 00 . | 295917

47 . 4
4 9

346 . 7
585

5420 . 0
590 9

10190 . 0
5918 1

427190 . 0
59182 7

129111

Facendo l'operazione come negli esempii precedenti, si trova per radice quadrata, meno di un' unità circa, il numero 295917; questa radice è quella di 87567000000; ma come si cerca quella di 87567, o di 87567, 000000; separo nella radice tanti decimali, quan'è la

metà de' zeri, che ho posto nel quadrato, ed ottengo 295, 917 per radice quadrata di 87567 meno una millesima circa.

Similmente se si cerca la radice quadrata di 2 meno una dieci millesima circa; si estrarrà la radice quadrata da 200000000, che si troverà essere 14142; separando le quattro cifre a dritta con una virgola, si avrà 1, 4142 per radice quadrata di 2, approssimata meno d' una dieci millesima circa.

141. Si è veduto (106) che per moltiplicare una frazione per un' altra bisognava moltiplicare numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore; in conseguenza per quadrare una frazione, bisogna quadrare il numeratore, e 'l denominatore: così il quadrato di $\frac{2}{3}$ è $\frac{4}{9}$, quello di $\frac{4}{5}$ è $\frac{16}{25}$.

142. Dunque reciprocamente, per estrarre la radice quadrata da una frazione, bisogna estrarre la radice quadrata dal numeratore, e dal denominatore: così, la radice quadrata di $\frac{9}{16}$ è $\frac{3}{4}$, perchè quella di 9 è 3, e quella di 16 è 4.

143. Ma può avvenire che il numeratore, o il denominatore, o tutti due non siano quadrati perfetti: se il numeratore solamente non

sia quadrato perfetto, si estrarrà la radice approssimamente col metodo esposto, ed estraendo la radice dal denominatore, si darà per denominatore alla radice del numeratore: così se si cerca la radice di $\frac{2}{9}$, si estrarrà la radice approssimante dal numeratore 2, che si troverà essere 1, 4, o 1, 41, o 1, 414, o 1, 4142 ec., secondocchè si voglia approssimare più o meno; e siccome la radice quadrata di 9 è 3, si avrà per radice prossima di $\frac{2}{9}$ la quantità $\frac{1,4}{3}$, o $\frac{1,41}{3}$, o $\frac{1,414}{4}$, o $\frac{1,4142}{3}$ ec.

Ma se il denominatore non è un quadrato esatto, si moltiplicheranno li due termini della frazione per questo denominatore, il che non cambia il valore della frazione, e renderà il detto denominatore quadrato: allora si opererà come nel caso precedente.

Per esempio se si cerca la radice quadrata di $\frac{3}{5}$, si ridurrà questa a $\frac{15}{25}$; ed estraendo la radice quadrata da 15, sino a tre decimali, per esempio, si avrà 3, 872; ed estraendola anche dal denominatore, si otterrà per radice quadrata di $\frac{15}{25}$, $\frac{3,872}{5}$.

144. Per non avere più sorte di frazioni nello stesso tempo, si ridurrà il risultato 2 – 22.

in decimali dividendo 3, 872 per 5, e si otterrà 0, 774 per radice di $\frac{3}{5}$ espressa puramente con decimali (99),

145. Finalmente se vi fossero degl' interi uniti alle frazioni, si ridurrebbero quest' interi in frazioni (86), e si opererebbe come è stato detto per una frazione semplice: Così per estrarre le radice quadrata da 8 $\frac{3}{7}$, si ridurrà questo a $\frac{59}{7}$, e questo secondo (143) a $\frac{413}{49}$, la di cui radice è $\frac{20,322}{7}$, o 2, 903.

146. Si può anche ridurre in decimali la frazione, che accompagna l' intero, ma bisogna avvertire d' impiegare un numero di decimali pari, e doppio di quello, che si vuole avere nella radice; poichè il prodotto della moltiplicazione di due numeri, che hanno de' decimali, dovendo contenere tanti decimali, quanti ve n' ha in ambi i fattori (54), il quadrato d' un numero, che ha de' decimali, deve averne il doppio di questo numero. Applicando questo metodo a 8 $\frac{3}{7}$, si trasformerà 8, 428571 (99), di cui la radice è 2; 903, come quì sopra.

147. Se si dovesse estrarre la radice quadrata da una quantità decimale, bisognerebbe badare di rendere pari il numero de' decimali

se non lo è; il che si farà mettendo appresso di questi decimali 1 o 3, o 5 zeri; ciò non ne cambierebbe punto il valore (30, Così, per estrarre la radice quadrata da 21, 935 con un millesimo di meno circa; io estraggo la radice quadrata da 21, 935000, che è 4, 683, questa è la stessa di 21, 935. Si troverà similmente, che quella di 0, 542, è con un millesimo di meno circa 0, 736, e che quella di 0,0054 è con un millesimo di meno circa 0,073.

148. Trovati col metodo esposto le tre prime cifre della radice, se ne possono avere molte altre con più facilità, e prontezza colla sola divisione, in questa maniera.

Prendiamo per esempio 763703556825: io comincio dal cercare le prime tre cifre della radice, col metodo di sopra; e trovo 873 per radice, e 157 4 per residuo: metto a lato di questo residuo le due cifre 55, che seguono la parte 763705, che ha dato le tre prime cifre. (Io metterei le tre cifre seguenti se avessi quattro cifre della radice, quattro se ne avessi 5, e così di seguito: divido 157455, che ho allora, pel doppio 1746 della radice; trovo per quoziente 90; queste sono due altre ci-

fre, che si mettono appresso alla radice, che perciò diviene 87390. Innalzo a quadrato questa radice, e sottraggo il suo quadrato 7637012100 dalla parte 7637035568, la di cui radice è 87390; ed il residuo è 23468

Se voglio altre cifre alla radice, siccome ne ho già cinque, io posso colla sola divisione trovarne 4. Metterò perciò appresso al residuo 23468 le due cifre rimanenti 23 del numero proposto, e due zeri; e dividendo 2346823oo pel doppio 174780 della radice trovata, avrò 1342 per le quattro nuove cifre, che debbo aggiungere alla radice. Ma dividendo il numero proposto in classi, nel modo che si è detto di sopra, si vede che la sua radice deve avere sei cifre per li numeri interi. Dunque questa radice è 873901, 342, con una millesima di meno circa.

Si può il più sovente spingere la divisione sino ad una cifra di più, cioè sino a tante cifre, quante ne sono nella radice; ma vi è qualche caso, per altro raro, in cui l'errore sull'ultima cifra potrebbe giungere sino a cinque unità, in vece che limitandosi ad una cifra di meno, come abbiamo fatto, non si te-

me neppure di avere un' unità di meno nell' ultima cifra .

Se dopo di aver trovato le prime cifre della radice col metodo ordinario, ciò che rimane dopo l' operazione fatta, si trovasse eguale al doppio di queste prime cifre , bisognerebbe, per evitare ogn' imbarazzo, determinarne ancora un' altra col metodo ordinario , dopo di che si troverebbero le altre col metodo abbreviato, che abbiamo esposto, il quale, come chiaramente si vede, s' applica ugualmente a i decimali .

Se la radice avesse de' zeri tra le sue cifre intermedie, nel caso in cui questi zeri fossero del numero delle cifre , che si determinano colla divisione, può accadere, se esse debbono essere le prime cifre del quoziente , che non si avvertano , perchè nella divisione non si segnano li zeri , che debbono precedere la sinistra del quoziente: il mezzo di distinguerli , è di badare, che si debbono sempre avere tante cifre al quoziente , quante se ne sono messe appresso al residuo ; e per conseguenza, quando ve ne siano dimeno , bisognerà completarne il numero con de' zeri situati sulla sinistra di questo quoziente .

Del resto il ristretto, che noi abbiamo ora esposto, è una conseguenza di quel principio generale, che è facile dedurre da quello che si è detto (134), cioè che il quadrato d' una qualunque quantità composta di due parti contiene il quadrato della prima parte, il doppio del prodotto della prima parte per la seconda, ed il quadrato della seconda parte.

Della formazione de' numeri cubi, e dell' estrazione delle loro radici.

149. Per fare il *cubo* d' un numero, bisogna prima moltiplicare questo numero per se stesso, ed indi il prodotto moltiplicarlo per lo medesimo numero.

Così, il cubo d' un numero è a propriamente parlare, il prodotto del quadrato d' un numero moltiplicato per questo medesimo numero: 27 è il cubo di 3, perchè esso risulta dalla moltiplicazione di 9 (quadrato di 3) per lo stesso numero 3.

Il numero che si cuba, è dunque tre volte fattore nel cubo: per questa ragione è chiamato *terza potenza*, o terzo grado di questo numero.

150. In generale si dice che un numero è innalzato alla seconda, terza, quarta, quinta potenza, quando si è moltiplicato per se medesimo 1, 2, 3, 4, volte consecutive, o allorch' egli è due volte, tre volte, quattro volte, cinque volte, fattore nel prodotto.

151. La radice cuba d'un cubo proposto, è quel numero, che moltiplicato pel suo quadrato, produce questo cubo: così 3 è la radice cuba di 27.

152. Non si ha dunque bisogno di regola per formare il cubo d'un numero; ma per passare dal cubo alla sua radice, vi è bisogno d'un metodo. Noi dedurremo questo metodo dall' esame di ciò, che accade nella formazione del cubo.

Osserviamo intanto, che non si ha bisogno di metodo per estrarre la radice cuba da un numero, che ha meno di quattro cifre, poichè 1000 essendo il cubo di 10, ogni numero al di sotto di 1000, e perciò espresso da meno di quattro cifre, avrà per radice meno di quattro cifre, avrà per radice meno di 10, cioè meno di due cifre.

Così, ogni numero, che caderà tra due di questi.

1, 8, 27, 125, 216, 343, 512, 729, avrà la radice cubica in numeri interi tra li due numeri corrispondenti di questa serie.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, di cui la prima ne contiene i cubi.

153. Non tutti i numeri hanno radice cuba; ma possiamo approssimarci continuamente ad un numero, che essendo cubo, si avvicina ancora di più in più di riprodurre questo primo numero: ciò che vedremo dopo di avere appreso a trovare la radice d'un cubo perfetto.

154. Vediamo dunque da quali parti può essere composto il cubo d'un numero, che contenesse delle decine, e delle unità.

Poichè il cubo risulta dal quadrato d'un numero moltiplicato per lo stesso numero, è necessario ricordarsi qui (134), che *il quadrato d'un numero composto di unità, e di decine contiene*, 1. *il quadrato delle decine* 2. *il doppio prodotto delle decine per le unità*; 3 *il quadrato delle unità*.

Per fare il cubo, bisogna moltiplicare que-

ste tre parti per le decine, e per le unità dello stesso numero.

Affin di comprendere più distintamente li prodotti, che ne risultano, daremo a questa operazione simulata la forma seguente.

1

Il quadrato delle decine Due volte il prodotto delle decine per le unità Il quadrato delle unità	essendo moltiplicato per le decine, darà	Il cubo delle decine Due volte il prodotto dal quadrato delle decine per le unità Il prodotto delle decine per lo quadrato delle unità

2.

Il quadrato delle decine Due volte il	essendo moltiplicato per le decine, darà	Il prodotto del quadrato delle decine molti-

prodotto delle decine per le unità
Il quadrato delle unità

plicato per le unità
Due volte il prodotto delle decine per lo quadrato delle unità

Dunque raccogliendo questi risultati, e riunendo quelli che sono simili, si vede, che i cubo d' un numero composto di decine, e di unità contiene quattro parti: cioè, *il cubo delle decine*, *tre volte il quadrato delle decine moltiplicate per lo quadrato delle unità*, *ed il cubo delle unità*.

Ciò posto, formiamo il cubo d' un numero composto di decine, e d' unità, di 43, per esempio.

$$
\begin{array}{r}
64000 \\
14400 \\
1080 \\
27 \\
\hline
79507
\end{array}
$$

Prenderemo dunque il cubo di 4, che è 64; ma siccome questo 4 esprime decine, il

suo cubo sarà di migliaja, perchè il cubo di 10 è mille; e perciò il cubo di 4 sarà 64000

3 volte 16, o tre volte il quadrato delle 4 decine, moltiplicato per le tre unità, dà 144 centinaja, perchè il quadrato di 10 è 100; così questo prodotto sarà 14400.

3 volte 4, o tre volte le decine essendo moltiplicate per lo quadrato delle unità, darà delle decine, e questo prodotto sarà 1080.

Finalmente il cubo delle unità terminerà al luogo delle unità, e sarà 27.

Unendo queste quattro parti, si avrà 79507 per cubo di 43; cubo che si sarebbe certamente trovato più facilmente, moltiplicando 43 per 43, ed il prodotto 1849 anche per 43. Ma non tanto si tratta quì di trovare il valore del cubo, quanto di conoscere, per l'esame delle parti, che lo compongono, la maniera di ritornare alla sua radice.

155. Ciò posto, ecco il processo per l'estrazione della radice cubica.

E S E M P I O.

Sia dunque proposto di estrarre la radice cubica da 79507.

Cubo   Radice

79. 507 155. 07	43
48	

Per avere la parte di questo numero che contiene il cubo delle decine della radice, io ne separo le tre ultime cifre, nelle quali, abbiamo veduto, che questo cubo non può essere compreso, poichè esso vale delle migliaja.

Cerco la radice cuba di 79; essa è 4, la quale la scrivo a fianco.

Innalzo a cubo 4, e tolgo il prodotto 64 da 79: mi resta 15, che io scrivo sotto di 79.

A lato di 15 abbasso 507, il che mi dà 15507, nel quale vi deve essere tre volte il quadrato delle quattro decine trovate, moltiplicato per le unità, che cerchiamo, più 3 volte queste medesime decine moltiplicate per lo quadrato delle unità, più il cubo delle unità.

Io separo le due ultime cifre 07: la parte 155, che rimane a sinistra, contiene 3 volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità; e perciò, per avere le unità (74), io divido questa parte 155 pel triplo del quadrato delle 4 decine, cioè per 48.

Io trovo che 48 si contiene tre volte in 155, e scrivo 3 alla radice.

Per far la pruova di questa radice, e conoscerne il residuo, se ve n' ha, noi potremmo comporre le tre parti del cubo, che debbono trovarsi in 15507, e vedere se esse formano 15507, o di quanto ne differiscono: ma egli è anche comodo di fare questa verifica, cubando da principio 43, cioè moltiplicando 43 per 43, il che produce 1849, e moltiplicando questo prodotto per 43, si avrà da 79507. In questa guisa 43 è la radice cuba esatta.

Se il numero proposto ha più di 6 cifre, si ragionerà come nell' esempio quì appresso.

Sia proposto di estrarre la radice cubica di 596947688.

```
596. 947. 688 1 842
 849. 47
 192
5927 04
-----------
 42436. 88
 21168
5969476 88
-----------
0000000 00
```

Si considererà la sua radice come composta di decine, e di unità, e per questa ragione si comincerà dal separare le tre ultime cifre.

La parte 596947, che contiene il cubo delle decine, avendo più di tre cifre, la sua radice ne avrà più d'una, e per conseguenza essa avrà delle decine, e delle unità: fa d'uopo dunque per trovare il cubo di queste prime decine, separare le tre cifre 947.

Ciò posto, io cerco la radice cuba di 596: essa è 8; scrivo 8 a fianco. Innalzo a cubo 8, e sottraggo il prodotto 512 da 596; rimane 84, il quale lo scrivo sotto di 596.

A lato di 84 abbasso 947, ed ottengo 84947, da cui separo le due ultime cifre.

Sotto della parte 849 io scrivo 192, il quale è il triplo quadrato della radice 8, e divido 849 per 192: trovo per quoziente 4, il quale lo scrivo alla radice.

Per verificare questa radice, ed avere nello stesso tempo il residuo, io innalzo a cubo 84, e sottraggo il prodotto 592704 dal numero 596947, ed ottengo per residuo 4243.

A lato di questo residuo abbasso la classe 688, e considerando la radice 84 come un sol numero, che esprime le decine della radice

trovata, io separo le due ultime cifre 88 della classe abbassata, e divido la parte 42436 per lo triplo quadrato di 84, cioè per 21168: io trovo per quoziente 2, il quale lo scrivo appresso di 84.

Per verificare la radice 842, ed ottenere il residuo, se ve n'è, io innalzo a cubo 842, e sottraggo il prodotto 596947688 dal numero proposto 596947688: e perchè non rimane nulla, conchiudo, che 842 è la radice esatta di 596947688.

Fa d'uopo inoltre osservare; 1. che nel corso di queste operazioni non si deve mai mettere più di 9 alla radice.

2. Se le cifre, che si scrivono alla radice fossero troppo grandi, non si potrebbe fare la sottrazione, ed allora si dovrebbe diminuire la radice di una, 2, 3 unità, sino a che la sottrazione divenga possibile.

Quando il numero proposto non è un cubo perfetto, la radice che si trova è approssimante, ed è raro che basti d'averla in numeri interi. I decimali sono in questo caso d'un uso vantaggiosissimo per portare innanzi quest' approssimazione molto più lontano, e

sin dove ne piace, senza però che si possa mai ottenere una radice esatta.

156. Per approssimarsi così vicino, che si vuole alla radice cuba di un cubo imperfetto, fa d'uopo porre appresso a questo numero tre volte tanti zeri, quanti caratteri si vogliono nella radice; estrarre, come negli esempj precedenti, la radice; ed indi seperare con una virgola sulla dritta tante cifre, quanti sono li decimali, che si cercano.

ESEMPIO.

Si cerca di approssimarsi alla radice cuba di 8755 sino a meno di un centesimo circa. Per avere de' centesimi nella radice, cioè due decimali, bisogna che il cubo o il numero proposto ne abbia sei (54), bisogna dunque mettere sei zeri al seguito di 8755.

Così la quistione ri riduce ad estrarre la radice cubica da 8755000000.

moltiplicheranno li due termini della frazione per lo quadrato del denominatore, ed allora il nuovo denominatore essendo cubo, si opererà come ora si è detto. Per esempio, se si cerca la radice cuba di $\frac{3}{7}$; io moltiplico il numeratore, e 'l denominatore per 49, quadrato del denominatore 7, ed ho $\frac{147}{343}$, che (88) è dello stesso valore di $\frac{3}{7}$. La radice cuba di $\frac{147}{343}$ essendo $\frac{527}{7}$, o ridotta puramente in decimali, o 75; la radice cuba di $\frac{3}{7}$ sarà o, 75 con una centesima di meno circa.

Se vi fossero degl' interi uniti alle frazioni, si ridurrebbe prima il tutto in frazione, ed indi si estrarrebbe la radice cuba da una frazione (157 e seguiti).

Si potrebbe anche ridurre la frazione in decimali, sia che vi siano degl' interi, sia che no: ma bisogna badare di spingere questa riduzione sino a tre volte altrettanti decimali, quanti se ne vogliono nella radice. Così, se ne cercasse la radice cuba di $7\,\frac{11}{3}$ approssimata sino ad un millesimo di meno, si trasformerebbe il rotto $\frac{3}{11}$ in o, 272 727 272; di sortecche per avere la radice cuba di $7\,\frac{3}{11}$, si dovrebbe estrarre quella di 7, 272727272, che si troverebbe essere 1, 937.

triplo quadrato della radice, e dividendo 7 per 12, trovo 0 per quoziente, il quale lo scrivo alla radice.

Innalzo a cubo la radice 20, ed ottengo 8000, il quale lo sottraggo da 8755; ho per residuo 755, a fianco del quale abbasso la classe 000, di cui separo due cifre sulla dritta: sotto della parte rimanente 7550 io scrivo 1200 triplo quadrato della radice 20, e dividendo 7550 per 1200, trovo 6 per quoziente, il quale lo scrivo alla radice.

Innalzo a cubo la radice 206, e sottraggo il prodotto da 8755000; ho per residuo 13184, a lato del quale abbasso l' ultima classe 000, di cui separo le due ultime cifre. Sotto della parte rimanente 131840 io scive 127308 triplo quadrato della radice trovata 206. Divido 131840 per 127308; io trovo per quoziente 1, il quale lo scrivo appresso a 206. Innalzo a cubo 2061, e sottratto da 8755000000, il prodotto 8754552 298,ottengo per residuo 447019.

La radice cuba approssimante di 8755000000 è dunque 2061 : dunque quella di 8755, 000000. sarà 20, 61; poichè il cubo ha il triplo de' decimali della sua radice. (54)

Se si volesse spingere più lontana l' appros-

simazione, si metterebbero appresso tre zeri, e si continuerebbe come si è operato ciascuna volta, che si è abbassata una classe.

157. Poichè per moltiplicare una frazione per un' altra, si moltiplica numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore; per cubare un rotto, bisognerà cubare il numeratore, ed il denominatore. Dunque reciprocamente, per estrarre la radice cuba da un rotto, si dovrà estrarre la radice cuba dal numeratore, e dal denominatore. Così la radice cuba di $\frac{27}{64}$ è $\frac{3}{4}$, perchè 3 è radice cuba di 27 e 4 l'è di 64.

158. Ma se il solo denominatore è un cubo esatto, si estrarrà la radice approssimante dal numeratore, e gli si darà per denominatore la radice cuba del denominatore. Per esempio se si cerca la radice cubica di $\frac{143}{343}$; siccome il numeratore non è un cubo esatto, io n' estraggo la radice prossima, che sarà 5, 22 con un centesimo di meno circa; ed estraendo la radice da 343, che è 7, ho $\frac{5,22}{7}$ per radice prossima di $\frac{143}{343}$; ovvero riducendo in decimali (99), ho 0, 74 per la radice prossima cercata con un centesimo di meno circa.

159. Se il denominatore non è cubo, si mol-

8,755,000,000 | 2061

07.55
12
8000

7550,00

1200
8741815

13184o,00
127308
8754552981

447019

Per quello che si è detto di sopra, io divido questo numero in classi di tre cifre ciascuna, andando da dritta a sinistra.

Estraggo la radice cuba dall' ultima classe 8: essa è 2, e la scrivo alla radice. Innalzo a cubo 2 e lo sottraggo da 8: ho per residuo 0, a lato del quale abbasso la classe 755, di cui separo le due ultime cifre 55. Sotto della parte rimanante 7 io scrivo 12, che è

160. Per estrarre la radice cuba da un numero, che abbia de' decimali, bisogna prepararlo con un numero sufficiente di zeri messi appresso, di maniera che il numero de' suoi decimali sia o 3, o 6, o 9, ed allora si estrarrà la radice, come se non vi fosse la virgola, e dopo fatta l'operazione, si separerà sulla dritta della radice con una virgola, un numero di cifre, che sia il terzo del numero de'decimali della quantità proposta: di sortecchè, se la radice non avesse sufficienti cifre, perchè questa regola abbia la sua esecuzione, vi si supplirebbe con de'zeri situati a sinistra della radice. Così per estrarre la radice cuba da 6, 54 con una millesima di meno circa, io metterò 7 zeri, ed estrarrò la radice cuba da 654 0000000, la quale sarà 1870; ne separerò 3 cifre, perchè vi sono 9 decimali al cubo, ed avrò 1, 870, o semplicemente 1, 87 per radice cuba di 6, 54. Si troverà parimenti, che quella di 0, 0006 approssimata d'un centesimo di meno circa, è 0, 08.

161. Quando si sono trovate le quattro prime cifre della radice cuba, col metodo, che si è sopra spiegato si possono trovare le altre

prontamente colla divisione nella maniera seguente.

Si cerchi la radice cuba di 5264627832723456; io ne cerco le prime quattro cifre col metodo ordinario; esse sono 1739, ed il residuo dell' operazione è 568i413. A lato di questo residuo metto le due cifre 72, che seguono la parte 5264627832, che ha dato le prime quattro cifre (Io metterei le tre cifre, che seguono questa medesima parte, se la radice trovata avesse cinque cifre e le quattro se essa ne avesse sei). Io divido 56814l372 per 9072363, triplo quadrato della radice 1739; ho per quoziente 62; e queste sono due nuove cifre da porre appresso di 1739, di sortecchè 173962 è la radice cuba del numero proposto espressa in numeri interi.

Se si volesse portarla innanzi, si cuberebbe questa radice, e sottratto il prodotto dal numero proposto, si metterebbero dopo del residuo quattro zeri, e si dividerebbe il tutto pel triplo del quadrato di 173962, il che darebbe quattro decimali per la radice.

Si faccia quì la medesima osservazione, che si è fatta (148) sul caso in cui la divisione non dà tante cifre, quante ne dovrebbe

dare . In queste divisioni si faccia uso della regola abbreviata espressa (69 e segu.).

Delle ragioni, e proporzioni, e progressioni; e di alcune regole che ne dipendono.

162. Le parole *ragione*, e *rapporto* hanno lo stesso significato in Matematica, e l'una, e l'altra esprimono il risultato del paragone di due quantità.

163. Se nel paragone di due quantità, si ha per oggetto di conoscere di quanto l'una eccede o manca dall'altra, il risultato di questo paragone, che è la differenza delle quantità medesime, si chiama *ragione aritmetica*.

Così, se io paragono 15 con 8, per conoscere la loro differenza 7; questo numero 7, che è il risultato del paragone, esprime la ragione aritmetica di 15 a 8.

Per indicare che si paragonano due quantità sotto questo punto di veduta, si separerà l'una dall'altra con un punto; di sortecchè 15. 8 epsrime, che si considera il rapporto aritmetico di 15 a 8.

164. Se nel paragone di due quantità, si cerca conoscere quante volte l'una contiene

l'altra, o è contenuta in questa, il risultato di questo paragone si chiama *ragione geometrica*. Per esempio, se io paragono 12 a 3, per sapere quante volte 12 contiene il 3, il numero 4, che esprime questo numero di volte, è la *ragione*, *geometrica* di 12 a 3.

Per dinotare che si paragonano due quantità sotto questo punto di veduta, si separa l' una dall' altra con due punti: questa espressione 12 : 3 indica, che si considera la ragione geometrica di 12 a 3.

165. Delle due quantità che si paragonano quella, che si pronunzia, o scrive la prima, si chiama *antecedente*, e la seconda si chiama *conseguente*. Così nella ragione di 12 : 3, 12 è antecedente, e 3 è il conseguente, ed entrambi si chiamano *termini* della ragione.

166. Per ottenere la ragione aritmetica di due quantità, si dovrà sottrarre la più piccola della più grande.

167. E per avere la ragione geometrica di due quantità, bisogna dividere l' una per l' altra.

168. Noi valuteremo questo rapporto da ora innanzi, dividendo l' antecedente per lo conseguente: così la ragione di 12 a 3 è 4; e la ragione di 3 a 12 è $\frac{3}{12}$ o $\frac{1}{4}$.

169. Una ragione aritmetica non cangia di valore, quando si aggiungono a i suoi termini, o si tolgono da' medesimi quantità eguali, perchè la differenza, (nel che consiste il rapporto), resta sempre la stessa.

170. Una ragione geometrica non cangia di valore, quando si moltiplicano, o dividono li suoi termini per lo stesso numero. Perciocchè, la ragione geometrica consistendo (168) nel quoziente della divisione dell' antecedente per lo conseguente, esprime una quantità frazionaria, che (88) non cambia di valore con moltiplicare, o dividere li suoi termini per uno stesso numero. Così, il rapporto di $3 : 12$ è lo stesso di quello di $6 : 24$, il quale si ottiene moltiplicando li due termini del primo per 2; ed è lo stesso di quello di $1 : 4$, il quale si ottiene dividendoli per 3;

171. Questa proprietà serve a semplificare li rapporti. Per esempio, se io dovessi esaminare la ragione di $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$, io direi, riducendo tutto in frazione, questa ragione è la stessa di quella di $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$, o riducendo alla stessa denominazione, è la stessa di quella di $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$, o infine sopprimendo il deno-

minatore 12, (o pure moltiplicando li due termini della ragione par 12), è lo stesso di quello di 81 a 128.

172. Quando quattro termini sono tali, che la ragione de' due primi è la stessa della ragione de' due secondi, le quattro quantità si diranno in *proporzione*; la proporzione sarà aritmetica, o geometrica, secondocchè le ragioni, che si considerano sono aritmetiche, o geometriche.

Le quattro quantità 7, 9, 12, 14 formano una proporzione aritmetica; perchè la differenza delle due prime è la stessa che la differenza delle due seconde. Per indicare che esse sono in proporzione aritmetica, si scrivono così, 7.9: 12.14; cioè, che si separano con un punto li termini di ciascuna ragione; e le due ragioni con due punti. Il punto che separa li due termini di ciascuna ragione significa *è a*, e li due punti, che separano le due ragioni, significano *come*: di sortecchè per enunciare la proporzione così scritta, si dice 7 *è a* 9 *come* 12 *è a* 14.

Le quattro quantità 3, 15, 4, 20 formano una proporzione geometrica; perchè 3 è conten uto in 15 tante volte, quanto 4 in 20. Per

indicare che essè sono in proporzione geometrica, si scrivono così 3 : 15 ; : 4 : 20 ; cioè, che si separano li due termini di ciascuna ragione con due punti, e le due ragioni con quattro. Li due punti significano *è a*, e li quattro *come*; di sortecchè si dice 3 *è a* 15, *come* 4 *è a* 20.

Bisogna solamente avvertire, che nella proporzione aritmetica si fa precedere la parola *come* alla parola *aritmeticamente*.

173. Il primo e l' ultimo termine della proporzione si chiamano *estremi*; ed il 2°, e 3° si chiamano *medj*.

Siccome vi sono due ragioni, e per conseguenza due antecedenti, e due conseguenti; si dice, per la prima ragione; *primo antecedente*, *primo conseguente*; e per la seconda; *secondo antecedente*, e *secondo conseguente*.

174 Quando li due termini medj d' una proporzione sono eguali, la proporzione si chiama proporzione *continua*: 3 . 7 : 7 . 11 formano una proporzione continua aritmetica; e si scrive ÷ 3 . 7 . 11; li due punti, ed il tratto, che precedono, servono per avvertire che nell' enunciazione si deve ripetere il termine di mezzo, che è qui 7.

te per la ragione, si prende tante volte, quante volte esso è contenuto nell' antecedente: così nella proporzione 12: 3 : : 20: 5 moltiplicate 3 e 5 ciascuno per 4, ed avrete 12: 12 : : 20: 20, Similmente nella proporzione 15: 9 : : 45 : 27, moltiplicate 9 e 27 ciascuno per $\frac{15}{9}$ o $\frac{5}{3}$, che è la quantità della ragione, ed avrete 15: 15 : : 45 : 45

Delle proprietà delle proporzioni aritmetiche.

176. La proprietà fondamentale della proporzione aritmetica è, che *la somma de' termini estremi uguaglia la somma de' termini di mezzo*: per esempio in questa proporzione 3. 7: 8. 12, la somma di 3 e 12 degli estremi è uguale a quella di 7 e 8 de' mezzi.

Ecco come possiamo assicurarci che questa proprietà è generale.

Se li due primi termini fossero eguali tra loro, nommeno che li due ultimi, come in questa proporzione si osserva:

7 . 7: 12. 12

è chiaro che la somma degli estremi sarebbe uguale a quella de' medj.

Or ogni proporzione aritmetica può essere

ridotta a questo stato (175) aggiungendo, o togliendo da ciascun antecedente la differenza che regna nella proporzione. Questa addizione, che aumenterà ugualmente la somma degli estremi, e de' medj, non altera l'uguaglianza delle somme; e ciò per la ragione ch' esse erano uguali senza questa medesima addizione. Lo stesso ragionamento vale per la sottrazione.

177. Poichè nella proporzione continua li due termini di mezzo sono eguali, ne segue, per ciò che si è dimostrato, che in questa medesima proporzione la somma degli estremi è doppia del termine di mezzo, o che il termine di mezzo è la metà della somma degli estremi. Così per avere la media proporzionale aritmetica tra 7 e 15, per esempio, sommo 7 con 15, e divido per 2; onde 11 è la media, di sortecchè sarà $\div$ 7 . 11 . 15.

Delle proprietà delle proporzioni geometriche.

178. La proprietà fondamentale della proporzione geometrica è, che *il prodotto de' termini estremi uguaglia il prodotto di quelli di mezzo*: per esempio in questa proporzione

3 : 15 : : 7 : 35 , il prodotto di 35 per 3 uguaglia quello di 15 per 7 , che sono ugualmente 150 .

Ecco come possiamo convincerci , che questa proprietà appartiene a qualunque proporzione geometrica .

Se gli antecedenti fossero uguali ai loro conseguenti , come in questa proporzione , 3; 3 : : 7 : 7 ; è chiaro , che il prodotto degli estremi sarebbe uguale al prodotto de' medj .

Ma si può sempre ridurre a questo stato una proporzione , moltiplicando li due conseguenti per la quantità della ragione . Questa moltiplicazione farà , in vero , che il prodotto degli estremi sarà un certo numero di volte più grande che non doveva essere , o un certo numero di volte più piccolo , se la ragione è una frazione , ma essa produrrà lo stesso effetto su quello de' medj .

Dunque , poichè dopo di questa moltiplicazione , il prodotto degli estremi sarebbe uguale al prodotto de' medj , questi due prodotti debbono altresì essere uguali anche senza questa medesima moltiplicazione .

Si può dunque prendere il prodotto degli estremi per quello de' medj , e viceversa .

Quindi *nella proporzione continua*, *il prodotto degli estremi è uguale al prodotto del termine di mezzo*: perciocchè li due medj essendo eguali, il loro prodotto è il quadrato di uno di essi. Dunque per avere un medio geometrico tra due numeri proposti, bisogna moltiplicare questi due numeri, ed estrarre dal prodotto la radice quadrata. Così per avere un medio geometrico tra 4 e 9, io moltiplico 4 per 9, e la radice quadrata 6 del prodotto 36 è la media proporzionale cercata.

179 Dalla proprietà fondamentale della proporzione geometrica ne segue, che conoscendosi tre termini di una proporzione, si conoscerà il quarto, con *moltiplicare il secondo per lo terzo*, *e dividere il prodotto per lo primo*; perciocchè è chiaro (74), che si avrebbe il quarto termine dividendo il prodotto de' due estremi per lo primo termine. Or questo prodotto è lo stesso di quello de' medj. Dunque si avrà anche il quarto termine dividendo il prodotto de' medj per lo primo.

Così se si cerca quale sarà il quarto termine d'una proporzione, di cui i primi tre termini fossero 3: 8: : 12 : si moltiplichi 8 per 12, e si ha 96, il quale diviso per 3, il quo-

ziente 32 sarà il quarto termine cercato: di sortecchè 3, 8, 12, 32 formano una proporzione. In fatti la quantità della prima ragione è $\frac{3}{8}$, e quella della seconda è $\frac{12}{32}$, (89), la quale si riduce anche a $\frac{3}{8}$, dividendo li suoi termini per 4.

Con un simile ragionamento si può trovare ogni altro termine della proporzione, tostocchè se ne conoscono tre. *Se il termine, che si vuol trovare, è uno degli estremi, bisognerà moltiplicare li due medj, e dividere il prodotto per l' estremo conosciuto: se al contrario si vuol trovare uno de' medj, bisognerà moltiplicare li due estremi, e dividere il prodotto per lo termine medio conosciuto.*

180. Questa proprietà dell' eguaglianza tra il prodotto degli estremi, e quello de' medj, appartiene esclusivamente alla proporzione geometrica. In fatti se vi fossero quattro quantità, che non siano in proporzione geometrica, moltiplicando li conseguenti per la ragione de' due primi, il primo antecedente solamente diverrebbe uguale al suo conseguente: per esempio, se si avessero 3, 12, 5, 10, moltiplicando li conseguenti 12 e 10 per la ragione $\frac{1}{4}$ de' due primi termini 3 e 12, si avreb-

bero 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, ne' quali si vede chiaramente, che il prodotto degli estremi non può essere uguale a quello de' medj: dunque questi prodotti parimenti non potrebbero essere eguali, quando anche non si fossero moltiplicati li conseguenti per la ragione $\frac{1}{4}$. E' chiaro, che questo ragionamento può applicarsi a tutti li casi.

Dunque, *se quattro quantità sono tali, che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medj, queste saranno in proporzione.*

Da ciò si ricava questa seconda proprietà delle proporzioni.

181. *Se quattro quantità sono proporzionali, tali saranno, se si pongono gli estremi nel luogo de' medj, ed i medj nel luogo degli estremi.*

182. Lo stesso si dirà, cioè, *che la proporzione sussisterà, se si cangiano di sito gli estremi, ed i medj.*

Infatti, in tutti questi casi, è facile vedere, che il prodotto degli estremi è sempre uguale a quello de' medj.

Così la proporzione 3 : 8 : : 12 : 32 può fornire tutte le proporzioni seguenti, per la sola permutazione de' suoi termini;

3 : 8 : : 12 : 32
3 : 12 : : 8 : 32
32 : 12 : : 8 : 3
32 : 8 : : 12 : 3
8 : 3 : : 32 : 12
8 : 32 : : 3 : 12
12 : 3 : : 32 : 8
12 : 32 : : 3 : 8

Lo stesso vale per ogni altra proporzione.

103. Poicchè si può mettere il terzo termine in luogo del secondo, e reciprocamente, si deve conchiudere, *che si possono, senza alterare una proporzione, moltiplicare o dividere li due antecedenti per lo stesso numero, e lo stesso vale per li conseguenti*; poichè facendo questa permutazione, li due antecedenti della proporzione data formeranno il primo rapporto, e li due conseguenti il secondo. Così moltiplicare li due antecedenti della prima proporzione, è lo stesso, che moltiplicare li due termini di una ragione per lo stesso numero; ciò che (170) non cambia questa ragione. Per esempio, se ho la proporzione 3 : 7 : : 12 : 28; io posso, dividendo li due ante-

cedenti per 3, dise 1 : 7 : : 4 : 28, perchè dalla proporzione 3 : 7 : : 12 : 28. Si può (182) ricavare l'altra 3 : 12 : : 7 : 28; e dividendo li termini della prima ragione per 3, si troverà 1 : 4 : : 7 : 28, la quale (182) può essere cambiata in 1 : 7 : . 4 : 28.

184. *Qualunque cambiamento fatto in una proporzione, di maniera che la somma dell'antecedente, e conseguente, o la loro differenza, sia paragonata all' antecedente o al conseguente, della stessa maniera in ciascuna ragione, formerà sempre una proporzione.*

Per esempio, se si abbia la proporzione

12 : 3 : : 32 : 28

Si potranno ricavare le proporzioni seguenti.

12 *più* 3 : 3 : : 32 *più* 8 : 8
o 12 *meno* 3 : 3 : : 32 *meno* 8 : 8
o 12 *più* 3 : 12 : : 32 *più* 8 : 32
o 12 *meno* 3 : 12 : : 32 *meno* 8 : 32

Poichè, se si paragona al conseguente, si vede facilmente, che l'antecedente aumentato o diminuito del conseguente, conterrà questo una volta di più, o di meno di prima: e siccome questo paragone si fa dell' istessa manie-

ta pel secondo rapporto, il quale per la natura della proporzione è uguale al primo, ne segue necessariamente, che le due nuove ragioni saranno anche uguali tra loro.

Se è l'antecedente che si paragona, avrà luogo lo stesso ragionamento, supponendo, che nella proporzione, sulla quale si fa questo cangiamento, si sia posto l'antecedente di ciascuna ragione nel luogo del suo conseguente, ed il conseguente nel luogo dell'antecedente; ciò che si può fare (181).

185. Poichè mettendo il terzo termine d'una proporzione nel luogo del secondo, e reciprocamente, sussiste la proporzione (282), si dovrà conchiudere, che li due antecedenti si contengono fra loro.

Quindi *la somma de' due atecedenti d' una proporzione contiene la somma de' due conseguenti, o è in essa contenuta, tante volte, quante volte uno degli antecedenti contiene il suo conseguente, o è in esso contenuto.*

Per esempio nella proporzione:

12 : 3 : : 32 : 8

12 più 32 : 3 più 8 : : 32 : 8, il che si vede chiaramente.

Ma per convincerne generalmente, fa d'uo-

po' riflettere, che se il primo antecedente contiene il secondo quattro volte, per esempio, la somma de' due antecedenti conterrà il secondo cinque volte: e per la stessa ragione la somma de' conseguenti conterrà il secodo conseguente 5 volte. Dunque la somma degli antecedenti conterrà quella de' conseguenti, come il quintuplo di uno degli antecedenti contiene il quintuplo di uno de' conseguenti, cioè (170) come uno degli antecedenti contiene il suo conseguente.

Dell' istesso modo si dimostrerebbe, che la differenza degli antecedenti sta alla differenza de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.

186. Egli è chiaro, che la proposizione ora dimostrata, si riduce a questa; se si hanno due ragioni eguali, per esempio quella

di 4 : 12
quella di . . . . 7 : 21

11 : 33

Si avrà ancora lo stesso rapporto sommando antecedente con antecedente, e conseguente con conseguente.

Quindi, *se si hanno molte ragioni eguali, la somma di tutti gli antecedenti starà alla somma di tutti li conseguenti, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente*. Per esempio se si abbiano le ragioni 4 : 12 : : 7 : 21 : : 2 : 6; si potrà dire che 4 *più* 7 *più* 2 sono a 12 *più* 21 *più* 6, come 4 è a 12, o come 7 sta a 21 ec.

Imperciocchè dopo di aver sommati gli antecedenti delle due prime ragioni, nommeno che li loro conseguenti, la nuova ragione, che siccome si è detto, è la stessa di ciascuna delle due prime, sarà altresì la medesima della terza; e per conseguenza si potranno anche combinarle con questa, e ne risulterà la stessa ragione, e così di seguito.

187. Si chiama *ragione composta*, quella, la quale risulta dalla moltiplicazione di due o più ragioni semplici fra loro. Per esempio, se si abbiano le due ragioni di 12 : 4 e di 25 : 5; il prodotto degli antecedenti, che è 300, sta al prodotto de' conseguenti, che è 20, in ragion composta di 12 : 4, e di 25 : 5.

188. Esprimendo la quantità della ragione una frazione, ne segue che la ragion composta esprimerà il prodotto di due frazioni (106).

189. Se le ragioni che si moltiplicano sono eguali, la ragion composta si dirà *duplicata*, se le ragioni oomponenti sono due, *triplicata*; se sono tre, *quadruplicata*, se sono quattro, e così di seguito. Per esempio, se si moltiplica la ragione di 2 : 3 per quella di 4 : 6, che l'è uguale, si avrà la ragione composta di 8 : 18, la quale si dirà ragione *duplicata* della ragione di 2 ; 3, o di 4 ; 6.

190. *Se si abbiano due proporzioni, e si moltiplichino per ordine, cioè il primo termine dell' una pel primo termine dell' altra; il secondo per lo secondo, e così di seguito; li quattro prodotti, che ne risulteranno, saranno proporzionali.*

Imperciocchè, moltiplicando in tal guisa le due proporzioni, si moltiplicano due ragioni eguali per due ragióni eguali (172); dunque le due ragioni composte, che ne risultano, dovranno essere eguali, e quindi li quattro prodotti dovranno formare proporzione (172).

291. Da ciò si conchiude, che *li quadrati, i cubi, ed in generale le potenze simili di quattro grandezze proporzionali, sono anche proporzionali*: poichè, per formare queste potenze, bisogna moltiplicare la proporzione una o più volte per se stessa.

192. *Le radici quadrate, cubiche, ed in generale le radici simili di quattro grandezze proporzionali, sono anche proporzionali*: perciocchè la ragione delle radici quadrate de' due primi termini è la radice quadrata della ragione di questi due termini (142) e (167); lo stesso dicasi della ragione delle radici quadrate de' due ultimi termini. Dunque, poichè le due primitive ragioni si sono supposte eguali, le loro radici quadrate saranno eguali; e perciò la ragione delle radici quadrate de' due primi termini sarà uguale alla ragione delle radici quadrate de' due ultimi termini. L' istesso si dirà per le radici cube, quarte.

Usi delle proposizioni precedenti.

193. Le proposizioni, che noi abbiamo dimostrate, e che si chiamano le *regole delle proporzioni*, hanno delle continue applicazioni in tutte le parti delle Matematiche. Noi ci limiteremo quì a quelle, che appartengono all' Aritmetica, e cominceremo da quella stabilita nel (179), e che è la base di quasi tutte le altre.

Della regola del tre diretta, e semplice.

194. Si distinguono molte sorte di regole del *tre*: esse hanno tutte per oggetto di far conoscere un termine d'una proporzione; di cui se ne conoscono tre.

Quella, che si chiama *regola del tre diretta, e semplice*, è chiamata *semplice*; perchè l'enunciazione delle quistioni, alle quali si applica, non contiene mai più di quattro quantità, di cui tre sono conosciute; e si cerca la quarta.

Si chiama essa diretta, perchè delle quantità, che si considerano ve ne sono sempre due, le quali non solo sono relative alle due altre, ma che ne dipendono in modo, che contengono, o sono contenute nelle loro corrispondenti: e più semplicemente, che una quantità, e la sua relativa, possono sempre essere antecedenti, e conseguenti nella proporzione, il che non ha luogo nella regola del tre inversa come vedremo tra poco.

Il metodo per trovare il quarto termine di una proporzione, e per conseguenza per fare la regola del tre diretta e semplice, si è suf-

ficientemente esposto (179); ma egli è a proposito di far conoscere con alcuni esempj l'uso, che si può fare di questa regola.

ESEMPIO I.

40 Operai hanno fatto in un certo tempo 268 tese di opera; si dimanda 60 Operai quante ne potrebbero fare nello stesso tempo? E' chiaro che il numero delle tese deve aumentare in proporzione del numero degli Operai; di sortecchè questi divenendo doppj tripli, quadrupli ec., quelle diventeranno parimenti doppie, triple, quadruple, e così si vede, che il numero delle tese cercate, deve contenere le 268 tese tante volte, qnante volte il numero 60 relativo al primo contiene il numero 40 relativo al secondo; bisogna dunque cercare il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre termini

40 : 60 : : 268ᵗ :

O (dividendo questi due primi termini per 20, ciò che è permesso (170) per questi tre altri

2 : 3 : : 268ᵗ :

Così, per quello che è stato detto (179), io

moltiplico 268^t per 3, e divido il prodotto 804 per 2: ed ho 402^t per quoziente, e per conseguenza 402^t per l'opera, che dovranno fare li 60 Operai.

ESEMPIO II.

Una nave ha fatto collo stesso vento 275 leghe in 3 ore; si dimanda in quanto tempo essa ne farebbe 2000, essendo le altre cose eguali.

Egli è chiaro che vi bisogna più tempo a proporzione del numero delle leghe; e quindi il numero de' giorni cercati, deve contenere 3 giorni tante volte; quante volte 2000 leghe contengono 275 leghe. Bisogna dunque cercare il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre.

$$275 : 2000 :: 3 :$$

Moltiplicando 2000 per 3, e dividendo il prodotto 6000 per 275, si avranno 21 $\frac{7}{11}$.

ESEMPIO III.

52^t 4^p 5^p d'opera sono state pagate 168^l 9^s 4^d; si dmanda quanto si deve pagare per 77^t 1^p 8^p.

Il prezzo di $77^t\ 1^p\ 8^p$ deve contenere il prezzo $168^l\ 9^s\ 4^d$ delle $52^t\ 4^p\ 5^p$ tante volte, quante volte $77^s\ 1^p\ 8^p$ contengono $52^t\ 4^p\ 5^p$. Bisògna dunque cercare il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre termini.

$$52^t\ 4^p\ 5^p : 77^t\ 1^p\ 8^p :: 168^l\ 9^s\ 4^d .$$

Cìoè che bisogna moltiplicare $168^l\ 9^s\ 4^d$ per $77^t\ 1^p\ 8^p$, e dividere il prodotto per $52^t\ 4^p\ 5^p$, ciò che si può fare per quello, che è stato detto (122, e 128).

Ma sarà ancora più semplice di ridurre i due primi termini alla loro più piccola specie, cioè in pollici, e la quistione sarà ridotta a cercare il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre termini:

$$3797 : 5564 :: 168^l\ 9^s\ 4^d : .$$

Allora moltiplicando $168^l\ 9^s\ 4^d$ per 5564 si avrà $937348^l\ 10^s\ 8^d$, e dividendo per 3797, il quoziente $246^l\ 17^s\ 3^d\ \frac{2780}{3797}$ sarà ciocchè si deve pagare per le $77^t\ 1^p\ 8^p$.

Se vi fossero delle frazioni; dopo di aver ridotto li due termini della medesima specie alla loro piccola unità, come in questo esempio, si semplificherebbe il rapporto di questi due nel modo, che è stato insegnato (171),

Della regola del tre inversa e semplice.

195. La regola del tre *inversa* e *semplice* differisce della regola del tre diretta, di cui abbiamo parlato; in ciò, che delle quattro quantità, che entrano nell'enunciazione della quistione, per la quale si fa questa operazione; le due principali debbono contenersi l'una nell'altra in un ordine contrario a quello delle altre quantità, che sono loro relative; di sortecchè, quando per l'esame della quistione si è dato a questa quantità la disposizione convenevole per formare una proporzione, una delle quantità principali, e la sua relativa formino gli estremi; e l'altra quantità principale colla sua relativa formino li medj.

Del resto ciò non induce alcuna differenza nella maniera di fare l'operazione, poichè è sempre il quarto termine d'una proporzione, che si tratta di trovare; almeno si può sempre ridurre a questi termini la quistione.

Certi Aritmetici han prescritto per lo caso presente una regola assoggettata all'enunciazione della quistione: non seguiremo punto il loro esempio; è la natura della quistione, e non già la sua enunciazione, (la quale soven-

te, è viziosa) quello che deve regolarne la soluzione.

ESEMPIO I.

30 Uomini hanno fatto una certa opera in 25 giorni, quanti uomini vi bisognerebbero per fare la medesima opera in 10 giorni?

Si vede, che bisognano in questo secondo caso, tanto più uomini, quanto è minore il numero de' giorni: così il numero degli uomini cercato deve contenere il numero de' 30 uomini tante volte, quanto il numero 25 di giorni relativi a quelli contiene il numero di dieci giorni. Si tratta dunque di trovare il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre...

$10^{l} : 25^{l} :: 30^{u} :$

Vale a dire di moltiplicare 30 per 25, e dividere il prodotto 750 per 10; il che dà 75. 75u.

ESEMPIO II.

Un equipaggio ha 15 giorni di viveri; ma le circostanze lo trattengono in mare per 20 giorni; si dimanda a quanto si deve ridurre

la totalità delle razioni per giorno?

Rappresentiamo per l' unità la totalità de' viveri, che consumano in ciascun giorno; si vede che quello, di cui si dovranno restringere deve essere tanto minore di questa unità, quanto il numero 20 de' giorni, duranti i quali questa economia deve durare, è più grande del numero de' 15 giorni; e per conseguenza, quante volte 20 giorni contengonono 15 giorni, altrettanto la totalità de' viveri, che si sarebbero consumati in ciascuno de' 15 giorni, deve contenere quella de' viveri, che si consumeranno in ciascuno de' 20 giorni. Bisogna dunque cercare il quarto termine d' una proporzione, la quale comincerebbe con li tre seguenti . , . .

$$20^{d} : 15^{d} : : 1 : \ldots$$

Questo quarto termine sarà $\frac{15}{20}$ o $\frac{3}{4}$; bisogna dunque che si riduca a $\frac{3}{4}$ di ciò, che si sarebbe consumato per giorno.

Della regola del tre cnmposta.

196. Nelle due regole del tre, che abbiamo esposte, la quantità cercata, e la quantità della stessa specie, che entra nell' enunciazio-

ne della quistione, hanno tra loro un rapporto semplice, e determinato da quello delle due altre quantità, le quali entrano parimenti nell' enunciazione della quistione.

Nella regola del tre composta, il rapporto della quantità cercata alla quantità della medesima specie, che entra nell' enunciazione della quistione, non è dato per lo rapporto semplice delle due qnantità solamente, ma per molti rapporti semplici, i quali si tratta di comporre (187) dietro l'esame della quistione.

Quando una volta questi rapporti sono stati composti, la regola è ridotta a quella del tre semplice: gli esempj seguenti rischiariranno ciò.

ESEMPIO

30. Uomini hanno fatto 132 tese d' d' opera in 18 giorni, 54 uomini quante ne faranno in 28 giorni?

Si vede che l' opera dipende quì, non solamente dal numero degli uomini, ma ancora dal numero de' giorni.

Acciò si abbia riguardo all' uno, od all' al-

tro, bisogna considerare che 30 uomini travagliando per 18 giorni, fanno 18 volte 30, cioè quello, che farebbero 540 uomini, i quali travagliassero per un giorno.

Similmente 54 uomini travagliando per 28 giorni, fanno quello che farebbero 28 volte 54, o 15 12 travagliando per un giorno.

La quistione dunque sarà cambiata in questa: 540 uomini hanno fatto 132 tese d' opera, quante ne farebbero 1512 nel medesimo tempo? cioè, che bisogna cercare il quarto termine di una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre . . . . . .

$540^{u} : 1512^{u} :: 132^{t} :$

Moltiplicando 1512 per 132, e dividendo il prodotto per 540, si troverà per risposta alla quistione $369^{t}\ 3^{p}\ 7^{p}\ 2^{l}\ \frac{2}{3}$.

ESEMPIO II.

Un uomo caminando 7 ore al giorno, ha messo 30 giorni a fare 230 leghe; se egli camminasse 10 ore al giorno, quanti giorni impiegherebbe per fare 600 leghe, andando sempre colla medesima velocità.

Se in ambi i casi camminasse per lo stesso

numero di ore al giorno, si vede chiaro, che impiegherebbe tanto più giorni, quanto maggiore sarebbe il cammino da fare, ma come nel secondo caso cammina per più ore in ciascun giorno, gli bisognerà meno tempo per questa ragione. Così l' operazione dipende in parte dalla regola del tre inversa.

Si ridurrà questa ad una regola di tre semplice considerando, che marciare 7 ore al giorno per 30 giorni, è lo stesso che marciare durante trenta volte 7 ore, o 210 ore: così si può cambiare la quistione in quest'altra: con 210 ore si sono fatte 230 leghe; quante ore bisogneranno per fare 600 leghe?

Quando si sarà trovato il numero delle ore, che soddisfi a questa quistione, dividendola per 10, si avrà il numero de' giorni cercato, poicchè l'uomo di cui si tratta impiega 10 ore per giorno.

Così bisogna cercare il quarto terrmine della proporzione, di cui li tre primi sono . . .

$$230^l : 600^l : 210^{oo};$$

Si troverà che questo quarto termine è 547 ore e $\frac{19}{23}$ le quali divisi per 10, che è il numero delle ore impiegate da quest' uomo in ciascun giorno, daranno 54 giorni, e $\frac{180}{230}$ o 54 $\frac{18}{23}$.

Della regola di società.

197. La regola di società è così chiamata, perchè serve a dividere tra molti associati il guadagno, o la perdita, che risulta dalla loro società.

Il suo scopo è di dividere un numero proposto in parti, che abbiano tra se delle ragioni conosciute.

La regola, che si dà per quest' oggetto è fondata su quello che abbiamo stabilito (186): noi la dedurremo da questo principio nell'esempio seguente.

ESEMPIO I.

Supponiamo, per esempio, che si tratta di dividere 120 in tre parti, che siano come li numeri 4, 3, 2: l'enunciazione di questa proposizione somminista queste due proporzioni.

4 : 3 : : la prima parte è alla seconda

4 : 2 : : la prima parte è alla terza.

O (182) queste due altre....

4 è alla prima parte : : 3 è alla seconda

4 è alla prima parte : : 2 è alla terza :

Di sortocchè si hanno questi tre rapporti uguali; 4 è alla prima parte : : 3 è alla seconda : : 2 è alla terza.

Or si è veduto (183) che la somma degli antecedenti di molte ragioni eguali, è alla somma de' conseguenti, come un antecedente è al suo conseguente. Si può dunque dire quì, che la somma 9 delle tre parti proporzionali a quelle che si cercano, è alla somma 120 di queste, come una qualunque delle tre parti proporzionali è alla sua corrispondente parte di 120. La regola si riduce dunque: 1° a sommare le parti proporzionati date; 2 a fare tanti quarti proporzionali, quante sono le parti, che si cercano, e di cui ciascuna avrà per primo termine la somma delle parti proporzionali date; per secondo termine il numero, che si vuol dividere; e per terzo termine una delle parti proporzionali date: così nella presente quistione si dovranno istituire queste proporzioni.

9 : 120 : : 4 :
9 : 120 : : 3 :
9 : 120 : : 2 :

dalle quali si troverà (179), che li quarti termini sono $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$, che hanno tra

loro le ragioni cercate, e che compongono effettivamente il numero 120.

Ma è facile di rilevare, che non è assolutamente necessario di fare tante regole del tre, quante sono le parti che si cercano: si può fare a meno per l' ultima, togliendo dal numero proposto la somma delle altre parti ritrovate.

ESEMPIO II.

Tre persone debbono dividersi il frutto della presa di un Vascello. La prima ha fatto un fondo di 20000 l, il secondo di 60000 l, ed il terzo di 120000 l; si dimanda ciò che spetta a ciascuno sulla presa, stimata 800000 l franchi di spese.

Si vede che si tratta di dividere 800000 l in parti, che abbiano tra loro li stessi rapporti, che hanno 20000, 60000, 120000, o (170) di 2, 6, 12, poichè ciascuno deve avere proporzionalmente al suo capitale; bisogna dunque sommare le tre parti proporzionali 2, 6, 12, e fare le tre seguenti proporzioni.

20 : 800000 : : 2 l alla prima parte
20 : 800000 : : 6 l alla seconda parte
20 : 800000 : : 12 l alla terza parte

Queste tre parti saranno 80000^{l}, 240000^{l}, 480000^{l}.

La quistione potrebbe essere più complicata, ed intanto essere ridotta ai medesimi principj, come nell' esempio seguente.

ESEMPIO III.

Tre persone hanno posto in società; la primo 3000^{l}, per lo spazio di sei mesi; la seconda 4000 per lo spazio di cinque mesi; la terza 8000^{l} per nove mesi; quanto ciascuno deve avere sul frutto, il quale ascende 12050^{l}?

Si ridurranno tutti gl' impieghi ad un medesimo tempo in questo modo.

L' impiego di 3000^{l} ha dovuto produrre per lo spazio di 6 mesi tante volte 3000, quanto produrrebbero in un mese 18000.

L' impiego di 4000^{l} ha dovuto produrre in 5 mesi, quanto produrrebbero 20000^{l} in un mese.

Finalmente l' impiego di 8000^{l} ha dovuto produrre in 9 mesi, quanto produrrebbero 72000^{l} in un mese.

Così la quistione si riduce a quest' altra; l' impieghi dei tre associati sono 18000^{l},

20000^l, 72000^l; quanto spetta a ciascuno sul guadagno 12050^l.

Procedendo come nell'esempio antecedente, si troverà 1971^l 16^s 4^d $\frac{4}{11}$, 2190^l 18^s 2^d $\frac{2}{11}$, 7887^l 5^s 5^d $\frac{5}{11}$.

Osservazione sulla regola precedente.

198. Non è inutile esaminare un caso, che può imbarazzare i principianti.

Se si proponesse questa quistione: dividere 650 in tre parti, di cui la prima sia alla seconda : : 5 : 4, e la prima sia alla terza come 7 : 3

Non si può applicare quì la regola precedente, senza una preparazione, la quale consiste a rendere la stessa, in ciascun rapporto dato, la parte proporzionale di una delle tre parti cercate: per esempio, quella della prima. Ciò si esegue facilmente, moltiplicando li due termini di ciascuna ragione per lo primo termine dell'altra: così le due ragioni di 5 : 4; e di 7 : 3 saranno ridotte ad avere uno stesso primo termine, moltiplicando li due termini della prima per 7, e li due termini della seconda per 5, il che non ne cangia

il valore (170), e dà le ragioni di 35 : 28, e di 35 : 15, di sortecchè la quistione si riduce a dividere 630 in tre parti le quali siano come li numeri 35, 18, e 15; il che si eseguirà facilmente colla regola precedente.

Se si cercasse di dividere un numero in quattro parti, delle quali la prima sia alla seconda : : 5: 4, la prima alla terza: ; 9 : 5, la prima alla quarta : : 7 : 3 si ridurrebbero queste ragioni ad avere uno stesso primo termine, moltiplicando li due termini di ciascuna per lo prodotto de' primi termini delle due altre ; così in questo esempio si cangerebbero le tre ragioni in queste tre altre 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135: di sortecchè la quistione si riduce a dividere il numero proposto in quattro parti, le quali siano tra loro come li numeri 315, 252, 175, 135.

Di alcune altre regole dipendenti dalle proporzioni.

199. Quantunque le regole seguenti siano di un uso meno frequente delle precedenti,

noi intanto non possiamo ometterle assolutamente; oltredicchè esse non sono senza utilità per se stesse; esse sono inoltre proprie a far conoscere gli usi delle proporzioni.

200. La prima, di cui noi parleremo, è la regola d'*una falsa posizione*. Questa si applica sovente a risolvere delle quistioni, che appartengono alla regola di società, da cui essa non differisce, che in vece di prendere le parti proporzionali tali quali sono date per l'enunciazione della quistione, ne prende una arbitrariamente, e ne rende le altre subordinate conformemente alla quistione; la qual cosa rende il calcolo un poco più facile.

ESEMPIO I.

Dividere 640[l] a tre persone, delle quali la seconda abbia il quadruplo della prima, e la terza due volte ed $\frac{1}{3}$ di quello, che hanno le altre due.

Io prendo arbitrariamente, per rappresentare la prima parte il numero, di cui posso prendere comodamente il terzo. La prima

parte essendo 3, la seconda sarà 12, e la terza 35:

La quistione si riduce a dividere 640 in tre parti, le quali siano tra se come li tre numeri 3, 12, 35; il che si farà come è stato detto (197).

La regola di falsa posizione serve anche a risolvere delle quistioni, che sono in qualche modo l'inverse di quelle della regola di società: poichè si tratta di ricavare dalla somma di alcune parti di un numero nu-questo mero medesimo, come nell'esempio seguente.

ESEMPIO. II.

Si cerca di trovare un numero, di cui $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$, e $\frac{3}{7}$ facciano 808. Io prendo un numero, di cui posso averne comodamente $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, e $\frac{3}{7}$ (ciò che è facile moltiplicando li tre denominatore). Questo numero sarà 105: io ne prendo $\frac{1}{3}$, che è 35; $\frac{1}{5}$, che è 12, $\frac{3}{7}$; che è 45: sommo questi tre numeri, ed ho 101; il quale è composto delle parti di 105, della stessa maniera che 808 l'è di quelle del numero, che si cerca. Dunque il richiesto deve avere lo stesso rapporto a 808, di quello di

105 ; 101 : esso dovrà dunque essere il quarto termine d'una proporzione, la quale comincerebbe con questi tre . . . .

101 ; 105 : : 808 :

Questo quarto termine è 840, di cui 808 contiene $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, e $\frac{3}{7}$.

201. La seconda regola di cui parleremo, è quella delle false posizioni.

Questa serve nelle quistioni, in cui si tratta di dividere non il numero proposto, ma solamente una parte di questo numero, in parti proporzionali a dati numeri: l'esempio seguente farà conoscere la regola, ed il suo uso.

E S E M P I O III.

Si tratta di dividere 6954^{l} tra tre persone, di maniera che la seconda sia uguale alla prima, e 54^{l} di più; e che la terza sia uguale alle due altre insieme, e 78^{l} di più.

Senza le 54, e 78^{l}, è chiaro, che si tratta di dividere il numero proposto in parti proporzionali a i numeri 1, 1, e 2. Ma poichè bisogna prelevare dalla somma 54 per la seconda persona, e 54^{l} più 78^{l} per la terza; è chiaro che una sola parte del numero

proposto si deve dividere in parti proporzionali ad 1, 1, e 2. E siccome questa parte è facile a trovarsi nell' esempio attuale, più difficile forse in altre circostanze, ne segue il il metodo seguente.

Supponiamo, per la prima parte, quel numero che vogliamo, per esempio, 1^{l}, la seconda parte sarà 1^{l} più 54^{l}, cioè 55^{l}; e la terza sarà 1^{l} più 55^{l} più 78^{l}, cioè 134: la somma di queste parti sarà 190^{l}?

Se si trattasse di dividerlo in parti proporzionali ed 1, 1, e 2; la prima parte essendo sempre supposta 1^{l}, la seconda sarebbe 1^{l}, e la terza sarebbe 2^{l}, e la somma sarebbe 4^{l}, di cui la differenza da 190^{l}, che è 186^{l}, e quelche bisogna prelevare dalla somma proposta 6954^{l}, ciò che la riduce a 6768: resta dunque a dividere 6768^{l} in parti proporzionali, ad 1, 1, e 2, secondo le regole qui sopra, ed avendo trovato che la prima parte è 1692^{l} si conchiuderà che le due altre parti cercate sono 1746^{l}, e 3516^{l}; infatti la somma di queste parti è 6954.

202. Si trovano ancora presso gli Aritmetici, molte altre regole, che sono un' applicazione delle regole del tre, in differenti quistio-

hi, come sono le quistioni d' *interesse*; di *cambio*, di *escomputo* ec.

Noi non entriamo in quei dettagli, li quali non sono difficili a quelli, che hanno ben capito li principj stabiliti quì sopra; e che avranno nello stesso tempo presente allo spirito lo stato della quistione. Noi ci limiteremo ad un solo esempio:

Una persona ha fatto ad un Mercante un biglietto di 2854[l]; pagabile in un anno: essa soddisfa al suo biglietto alla fine di 7 mesi; ed il Mercante consente di diminuire per li restanti 5 mesi, gl' interessi, che sono stati compresi nel biglietto, e ragione del 6 per 100 per 12 mesi: si dimanda per qual somma il mercante deve registrare il biglietto.

Poichè 12 mesi producono il 6 per 100 d' interesse, 7 mesi hanno dovuto produrre un interesse, che si troverà cercando il quarto termine d' una proporzione, di cui li primi tre termini sono: . .

$12 : 7 :: 6 :$

Questo quarto termine sarà $\frac{42}{12}$ e $3\frac{1}{2}$. Or quando l' interesse è stato preso al 6 per 100, si è contato per 106l, quello che valeva 100. Dunque quando l' interesse è al $3\frac{1}{2}$; si com-

puterà per $103\frac{1}{2}$, quello che vale 100. Bisogna dunque attualmente pagare per $103\frac{1}{2}$ quello, che doveva pagarsi 106. Così la somma cercata dovrà essere il quarto termine d' una proporzione, di cui li tre primi termini sono

$$106 : 103\tfrac{1}{2} :: 2854^{l} :$$

Questo quarto termine, il quale è 2786^{l} 13^{s} $9^{d}\frac{30}{106}$, è la somma, che il debitore deve, per ritirare il suo biglietto.

Della regola di allegazione;

203. Le quistioni, che appartengono a questa regola, sono di due sorte.

Nell'una si tratta di trovare il valore medio di molte sorte di cose, di cui il numero, ed il valore particolare di ciascuno sono conosciuti.

Nella seconda si tratta di conoscere la qualità di ciascuna specie di cose, che entrano in una o più miscele, allorchè si conosce il prezzo, o il valore totale di ciascuna miscela.

Noi ci riserbiamo le quistioni della seconda specie, per servire d'applicazione nell'Algebra.

In quanto alle quistioni della prima, ecco la regola per risolverle.

Moltiplicate il valore di ciascuna specie di cose per lo numero delle cose di questa specie; sommate tutti li prodotti, e dividete la somma pel numero totale delle cose di tutte le specie,

ESEMPIO

S' impiegano 200 operai, di cui 50 sono pagati a ragione di 40 soldi al giorno, 70 a ragione di 30 soldi, 50 a ragione di 25 soldi; e 30 a ragione di 20 soldi; quanto spetterà per giorno a ciascun operajo, l' un per l'altro?

50 Operai a 40s il giorno fanno una spesa

di . . . . . . -	2000s
70 a 30s	2100
50 a 25s	1250
30 a 20	600
	5950s

La spesa di 200 Operai è dunque di 5950s per giorno; e per conseguenza, (dividendo per 200) a ciascun Operajo, l'un per l'altro,

gli spetta 29^s 9^d al giorno. Le altre quistioni di questa specie sono casi da risolversi dopo di questo esempio, che noi crediamo a proposito di non trattenerci su di questà materia.

Delle progressioni Aritmetiche.

204. La progressione Aritmetica è una serie di termini, in cui ciascun termine eccede, o manca dal suo precedente della madesima quantità.

Per esempio questa serie . . . .

$\div$ 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25, ec.

è una progressione Aritmetica; perchè ciascun termine supera quello, che lo precede della quantità 3.

Li due punti separati da una linea, che si vedono quì sul principio della progressione, sono destinati a dinotare, che enunciando questa progressione, si deve ripetere ciascun termine, eccetto il primo, e l' ultimo, in questa maniera 1 *è a* 4, *come* 4 *è a* 7; *come* 7 *è a* 10.

La progressione si dice *crescente* o *decrescente*, secondocchè li termini vanno aumentando, o diminuendo: ma siccome le proprie-

tà dell' una, e dell' altra sono le stesse, cambiando solamente le parole *più* in *meno*, e *aggiungere* in *sottrarre*, noi la considereremo quì unicamente come crescente.

205. Si vede dunque, dietro la definizione della progressione Aritmetica, che col primo termine, e la differenza comune, o la quantità della ragione costante, si possono formare tutti gli altri termini, aggiungendo successivamente questa ragione; e per consegnenza.

Il secondo termine è composto del primo più la ragione.

Il terzo è composto del secondo più la ragione; e per conseguenza del primo più due volte la ragione.

Il quarto è composto del terzo più la ragione; e per conseguenza del primo più tre volte la ragione, e così di seguito.

206. Di sortecchè si può dire in generale, che *un termine qualunque d' una progressione Aritmetica, è composto del primo, più tante volte la ragione, quanti sono li termini, che lo precedono*.

207. Dunque se il primo termine fosse zero, ogni altro termine della progressione sarebbe eguale a tante volte la ragione, quanti sono li termini avanti di lui.

208. Questo principio può avere le due seguenti applicazioni.

1. Esso serve a trovarle un termine qualunque di una progressione, senza essere nell'obbligo di calcolare quelli che lo precedono: che si cerchi, per esempio, quale è il 100:^{ma} termine di questa progressione . . . .

÷ 4. 9. 14. 19. 24, ec.

Poichè il termine cercato deve essere il centesimo, esso ha dunque 99 termini prima di lui, esso è dunque composto del primo termino 4, e di 99 volte la ragione 5; esso è dunque 4 più 495, cioè 499.

209. 2° Questo medesimo principio serve a ligare due numeri qualunque con una serie di quanti altri numeri si vogliano; di maniera che il tutto formi una progressione Aritmetica; ciò che dicesi *inserire tra due dati numeri, qualunque numero di medie proporzionali aritmetiche*, o semplicemente molte *medie proporzionali*.

Per esempio si possono ligare 1, e 7 con cinqne numeri, li quali facciano una progressione aritmetica con 1, e 7: questi numeri sono, 2, 3, 4, 5, 6. Ma come non è sempre facile vedere ad un colpo d'occhio, qua-

si siano questi numeri, ecco come si possono trovare coll' ajuto del principio, che abbiamo stabilito.

Si tratta di trovare la ragione, che regna in questa progressione.

Ora il più grande de' due numeri proposti, dovendo essere l'ultimo termine d'una progressione, deve essere composto dal primo, cioè dal più piccolo de' due numeri, più tante volte la ragione, quanti sono li termini che lo precedono; dunque se dal maggiore di questi due numeri si sottragga il minore, il residuo sarà composto di tante volte la ragione, quanti sono li termini, che precedono il più grande; vale a dire, che esso è il prodotto di questa ragione per lo numero de' termini, che precedono il più grande. Dunque (74) se si divida questo residuo pel numero de' termini, che debbono precedere il più grande, si avrà questa ragione.

Or il numero de' termini che debbono precedere il più grande, è maggiore di un' unità del numero delle medie, che si vogliono inserire tra li due: *dunque per inserire tra due dati numeri un numero qualunque di medie proporzionali aritmetiche, fa d' uopo sottrarre*

il più piccolo de' due numeri dal più grande, e dividere il residuo per lo numero delle medie accresciuto di un'unità. Il quoziente sarà la differenza o la ragione, che deve regnare nella progressione.

Per esempio, se tra 4, e 11 si cerca introdurre 8 medie aritmetiche; io sottraggo 4 da 11; rimane 7, il quale lo divido per 9, numero delle medie accresciuto d' un' unità; il quoziente $\frac{7}{9}$ è la differenza, che deve regnare nella progressione, la quale sarà per conseguenza . . . .

$\div\ 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9\frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Similmente tra 0, e 1 se si cercano nove medie aritmetiche, sottraendo 0 dà 1, rimane, il quale diviso per 10, numero delle medie accresciuto di un' unità, da $\frac{1}{10}$, 0 0, 1 per ragione. E quindi la progressione sarà $\div$ 0, 0, 1 . 0, 2 . 0, 3 . 0, 4 . 0, 5 . 0, 6 . 0, 7 . 0, 8 . 0, 9 . 1.

210. Da ciò si vede, che tra due numeri per quanto vicini siano, si possono sempre trovare quante medie proporzionali si vogliono.

Noi non ci tratteremo di vantaggio sulle progressioni aritmetiche, poichè abbiamo trat-

tato di quella parte solamente, che ha rapporto co' logaritmi, di cui parleremo più abbasso: avremo però occasione di ritornarvi.

Delle progressioni geometriche.

211. La progressione geometrica è una serie di termini, di cui ciascuno contiene, o è contenuto nel precedente lo stesso numero di volte. Per esempio questa serie . . . . .
∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192
è una progressione geometrica; poichè ciascun termine contiene quello, che lo precede, lo stesso numero di volte, che è 2.

Questo numero è ciò, che chiamasi *la ragione* della progressione.

Li quattro pnnti, che precedono la progressione, hanno lo stesso significato delli due punti, che precedono la progressioue aritmetica (204). Ma se ne mettono quattro per avvertire che la progressione è geometrica.

La progressione si dice *crescente*, o *decrescente*, secondocchè li termini vanno aumentando, o diminuendo.

Noi considereremo sempre la progressione geometrica come crescente, perchè le proprie-

tà sono le stesse in entrambe, cambiando la parola di *moltiplicare* in quella di *dividere*, e quella di *contenere* in *esser contenuto*.

Poichè il secondo termine contiene il primo tante volte, quante sono le unità della ragione; esso sarà dunque composto dal primo moltiplicato per la ragione.

Poichè il terzo termine contiene il secondo tante volte, quante sono le unità della ragione; sarà esso composto del secondo moltiplicato per la ragione; e per conseguenza dal primo moltiplicato per lo quadrato della ragione, o per la seconda potenza della ragione.

Lo stesso dicasi del quarto; per cui sarà composto dal primo termine moltiplicato per lo cubo o terza potenza della ragione.

Per esempio, *nella progressione quì sopra*; 6 è composto dal primo 3 moltiplicato per 2; 12 è composto dal primo 3 moltiplicato per 4 quadrato di 2; 24 è composto dal primo termine 3 moltiplicato per 8 cubo di 2.

212. Continuando lo stesso ragionamento, si vede, *che un termine qualunque di una progressione geometrica, è composto dal primo moltiplicato per la ragione innalzata alla po-*

tenza indicata dal numero de' termini, che precedono.

Dunque, se il primo termine della progressione è l' unità, ciascun altro termine sarà formato dalla ragione innalzata alla potenza indicata dal numero de' termini, che precedono; perciocchè il moltiplicare pel primo termine, che è l' unità, non aumenta punto il prodotto.

Per innalzare un numero ad una data potenza, alla settima, per esempio, bisogna, secondo l' idea, che abbiamo data delle potenze, moltiplicare questo numero per te stesso, sei volte consecutive; così, per elevare 2 alla settima potenza, io direi 2 volte 2 fanno 4, 2 volte 4 fanno 8, 2 volte 8 fanno 16, 2 volte 16 fanno 32, 2 volte 32 fanno 64, 2 volte 64 fanno 128; ma si può abbreviare l' operazione in diverse maniere, per esempio, io posso prima quadrare 2, che mi dà 4, cubare 4, che mi dà 64, ed indi moltiplicare questo per 2, che dà 128; o pure, posso cubare 2, che mi dà 8, quadrare 8, che mi dà 64, e moltiplicare questo per 2, che mi dà 128: in una parola poco importa di qual maniera si prenda il 2, purchè esso si trovi sette volte fattore nel prodotto.

213. Il principio, che abbiamo stabilito, (212) per la formazione d'un termine qualunque d'una progressione, e l'osservazione, che abbiamo fatta, possono servire per determinare qualunque termine della progressione, senza essere nella necessità di calcolare que' che lo precedono: se si dimanda, per esempio, qual'è il dodicesimo termine della progressione . . . . .

÷÷ 3 : 6 : 12 : 24, ec.

Sicoome io so (212) che questo dodicesimo termine deve esser composto dal primo moltiplicato per la ragione elevata all' undecima potenza; così formo il cubo di 2, che è 8, cubo 8, ed ho 512 per la nona potenza; moltiplico questa per 4, ed ho l' undecima potenza di 2, che è 2048; moltiplico infine 2048 per 3 primo termine, ed ho 6144 duodecimo termine cercato.

214. Un' altra applicazione, che si può fare del medesimo principio è di poter trovare un qualunque numero di medie proporzionali tra due numeri dati. Se si volessero tre medie geometriche tra 6 e 64, con un poco di attenzione si vede, che queste tre medie geometriche sono 8, 16, 32: in fatti ÷÷ 4 : 8 :

16 : 32 : 64 formano una progressione geometrica ; ma se si proponessero altri numeri , ò che si cercasse un altro numero di medie proporzionali geometriche , non si troverebbero così facilmente .

Or ecco come si possono trovare mercè il principio , di cui si tratta .

La quistione si riduce a trovare la ragione , che deve regnare nella progressione ; poichè quando essa sarà trovata , si formeranno facilmente i termini , colle moltiplicazioni successive per questa ragione .

Si tratta , per esempio , di trovare nove medie geometriche tra 2 e 2048 .

2048 sarà dunque l' ultimo termine di una progressione geometrtrica , la quale comincia da 2 , e che deve avere nove termini tra il primo , e l' ultimo . 2048 è dunque composto dal primo termine 2 moltiplicato per la ragione elevata ad una potenza , che è indicata dal numero de' termini , che precedono 2048 .

Dunque (69) se si divida 2048 pel primo termine , il quoziente sarà la ragione elevata ad una potenza , che è indicata dal numero de' termini , che debbono precedere 2048 : dunque cercando qual' è la radice di questa po-

tenza, si avrà la ragione. Or questa potenza deve essere la decima, poichè dovendo esservi nove termini tra 2, e 2048, ve ne sono necessariamente dieci prima di 2048. Bisogna quindi estrarre la radice decima dal quoziente, che nasce dividendo il più grande termine 2048 per lo più piccolo 2.

215. Potendosi fare lo stesso ragionamento in tutti li casi, conchiudiamo in generale, *che per inserire tra due dati numeri un numero qualunque di medie proporzionali; bisogna dividere il più grande tra li due numeri per lo più piccolo; estrarre dal quoziente la radice indicata dal numero delle medie accresciuto dell' unità.*

Così, per ritornare al nostro esempio, io divido 2048 per 2, ed ho 1024, da cui estraggo la radice decima (1); questa è 2;

(1) *Noi non abbiamo dato il metodo per estrarre la radice decima da un numero; ma per queste radici vagliono le stesse regole che per le radici quadrate, e cube: la radice quadrata deve avere una sola cifra, allorchè il numero proposto non ne ha più di due: la ra-*

dunque la ragione è 2: così per trovare le medie sudette, io moltiplico il primo termine 2, continuamente per la ragione 2, e dopo di aver formate nove medj, io trovo per ultimo termine 2048, come quì si vede . . .
∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024. 2048.

Similmente se si cercassero quattro medie geometriche tra 6, e 48, io dividerei 48 per 6, e dal quoziente 8 n' estrarrei la radice quinta: e siccome 8 non ha radice quinta esatta, non si possono mai assegnare esattamente in numeri quattro medj geometrici tra 6 e 48. Ma si può approssimare a questa radice, con un metodo analogo a quello della radice quadrata, e della radice cuba, e che faremo

dice cuba ne ha una, quando il numero proposto non ne ha più di tre: similmente la radice decima avrà una cifra, quando il numero proposto non ne ha più di dieci; lo stesso dicasi per le altre radici: la trentesima, per esempio, avrà una cifra, se il numero proposto non ne ha più di trenta: ciò si dimostra dell' istessa maniera, che per le radici quadrate, e cube.

conoscere nell' Algebra. Intanto basta, che si concepisca, che è possibile di trovare un numero, il quale moltiplicato quattro volte di seguito per se stesso, si approssima di più in più a riprodurre 8; e che accade lo stesso per ogni altro numero, e per ogni altra radice: e da ciò noi conchiudiamo, che tra due numeri qualunque si possono sempre trovare quanti medj geometrici si vogliono, sia esattamente, sia per un' approssimazione spinta a quel grado che si vorrà; ed è quanto basta per passare a i Logoritmi.

De' Logoritmi.

216. I Logaritmi sono de' numeri in progressione Aritmetica, li quali corrispondono termine per termine ad una simile serie di numeri in progressione geometrica. Se si abbiano, per esempio, le progressioni geometrica, ed aritmetica seguenti . . . . . .

÷÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, ec.
÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. ec.

Ciascun termine della serie inferiore si dice logaritmo del termine corrispondente superiore.

217 Uno stesso numero può dunque avere

infiniti logaritmi, perchè alla stessa progressione geometrica si possono far corrispondere progressioni aritmetiche differenti. Considerando que' logaritmi rapporto all' uso, che se ne può fare ne' calcoli numerici, non ci fermeremo a considerare le differenti progressioni geometriche, ed aritmetiche, che si potrebbero paragonare tra loro: passeremo subito a quelle, che si sono considerate nella formazione delle tavole logaritmiche.

218. Si è scelta per progressione geometrica la decupla; e per progressione aritmetica la serie de'numeri naturali; cioè che si sono scelte le due progressioni seguenti . . . . .

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000.
÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

219. Così sarà sempre facile di conoscere qual' è il logaritmo dell' unità seguita da quanti zeri si vogliano, esso ha sempre tante unità, quanti zeri sono al seguito di questa unità.

Noi non insegneremo quì il metodo, che si è tenuto per trovare li logaritmi de' termini intermedj della progressione decupla: esso dipende da principj, che non possiamo esporre quì: ma ne spiegheremo la loro formazione per una via, la quale non è in vero la

più spedita per calcolare questi logaritmi, ma che basta, tanto per comprendere questa formazione, che per rendere ragione degli usi, a i quali s'impiegano questi numeri artifiziali.

220. Dopo la definizione, che noi abbiamo data de' logaritmi, si vede, che per avere il logaritmo d'un numero qualunque, di 3, per esempio, bisogna, che questo numero faccia parte della progressione gemetrica ∺ 1 : 10 : 100 : 1000, ec. : intanto si vede, che se tra 1 e 10 s'introduce un grandissimo numero di medie proporzionali geometriche (214), siccome si salirebbe allora da 1 a 10 per gradi tanto più piccoli, quanto maggiore è il numero di queste medie; ne avverrebbe o che una delle medie si troverebbe essere precisamente 3, o che almeno se ne troverebbero due consecutive, tra le quali il numero 3 sarebbe compreso, e di cui ciascuna differirebbe tanto meno da 3, quanto più grande sarebbe il numero de' medj inserito.

Ciò posto, se s'inserissero similmente tra 0, e 1 tanti medj aritmetici, quanti se ne sono inseriti medj geometrici tra 1 e 10, ciascun termine della progressione geometrica avendo per logaritmo il termine corrispondente

della progressione aritmetica, si prenderebbe in questa per logaritmo di 3, il numero, che si troverebbe nel sito simile a quello, in cui si trova nella progressione geometrica; o se 3 non fosse esattamente qualch' uno di questi termini, si prenderebbe nella progressione aritmetica, il termine, che corrisponderebbe a quello della progressione geometrica, il quale si approssima più al 3.

In questo modo si potrebbe determinare, se non vi fossero de' mezzi più spediti: checchè ne sia, a questo si riduce il calcolo de' logaritmi.

221. Bisogna tener presente, che avendo inserito 10000000 medj geometrici tra 1 e 10, un simil numero tra 10 e 100, un simile ancora tra 100 e 1000, che si è parimenti inserito l'istesso numero di medj aritmetici tra 0 e 1, tra 1 a 2, tra 2 e 3; e che avendo ordinati tutti li primi sulla stessa linea, e tutti li secondi al di sotto, si è cercato nella prima il numero più approssimante di 2, e si è preso nella serie inferiore il numero corrispondente: che si è fatto lo stesso successivamente per li numeri 3, 4, 5, 6, e che in fine avendo trasportato nella medesima colon-

na, come si vede nella tavola qui annessa, li numeri 1, 2, 3, 4, 5, si sono scritti in una colonna a fianco li termini della progressione aritmetica, che si sono trovati corrispondenti a quelli, o almeno a que' che si approssimano più: allora si avrà l'idea della formazione de' logaritmi, e della loro disposizione nelle tavole ordinarie.

Tavole de' logaritmi de' numeri naturali da 1 sino a 200.

Logaritmi	Numeri.	Logaritmi	Numeri.	Logoritmi.	Numeri.	Logaritmi.
nfini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
, 000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
, 301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
, 477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
, 602060	34	1,531479	64	1,806180	84	1,973128
, 698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
, 778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
, 845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
, 903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
, 954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
1, 000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
1, 041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
1, 079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
1, 113943	43	1,633568	73	1,863323	103	2,012837
1, 146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
1, 176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
1, 204120	45	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
1, 230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
1, 255273	48	1; 681241	78	1,892095	108	2,033424
1, 278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
1, 301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
1, 322219	51	1,708570	81	1,908485	111	2,045323
1, 342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
1, 361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
1, 380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
1, 397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
1, 414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
1, 431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
1, 447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
1, 462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
1, 477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Numeri.	Logaritmi.	Numeri.	Logaritmi.	Numeri.	Logaritmi.	Numeri.	Logaritmi
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	5,155336	163	2,212188	183	2,26245
124	2,093422	144	2,158362	104	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,26717
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2.27184
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,27415
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,27646
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,27875
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,2810
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	102	2,28330
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,28545
234	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	21,2878
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,29003
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,29225
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,29446
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,29666
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,29885
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,30103

Li logaritmi contenuti in questa tavola, hanno sei cifre dopo la virgola; ne hanno sette nelle tavole ordinarie; ma questa differenza non nuoce niente all'uso, che ne faremo qui appresso.

222. Sul proposito di questa tavola osserviamo, che la prima cifra a sinistra di ciascun logaritmo, si chiama *caratteristica*; poichè per questa cifra si può giudicare in qual decade si contiene il numero, al quale appartiene

questo logaritmo: per esempio, se un numero ha per caratteristica 3, io so che esso appartiene alle migliaja, perchè il logaritmo di 1000 è 3, e che quello di 10000 essendo 4, ogni numero da 1000 sino a 10000 non può avere per logaritmo che 3 ed una frazione: egli ha dunque 3 per caratteristica, e le altre cifre esprimono questa frazione ridotta in decimali.

Proprietà de' Logoritmi.

223. Siccome si tratta quì de' Logoritmi, tali quali sono nelle tavole ordinarie, le proprietà, che ora esporremo, riguardano le progressioni geometriche, le quali hanno l'unità per primo termine; e le progressioni aritmetiche, le quali hanno zero per primo termine.

Paragoniamo dunque ancora termine a termine di una progressione geometrica qualunque, ma di cui il primo termine sia l'unità, con una progressione aritmetica qualunque, ma di cui il primo termine sia zero; per esempio, le due progressioni seguenti . . . . .

∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, ec.
÷ 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. 28 32, ec.

Segueper la natura, e la corrispondenza perfetta di queste due progressioni, che quante volte la ragione della prima à fattore in uno qualunque de' termini di questa progressione, tante volte la ragione della seconda è contenuta nel termine corrispondente di questa seconda: per esempio, nel termine 2187, la ragione 3 è sette volte fattore, e nel termine 28, la ragione 4 si contiene sette volte.

In fatti, secondo quello che si è detto (206 e 212), la ragione è fattore di un termine qualunque della prima tante volte, quanti sono i termini prima di lui; e nella seconda, un termine qualunque è composto di tante volte la ragione, quanti v' ha di termini avanti di lui. Ora vi è lo stesso numero di termini da una parte, e l' altra:

Conchiudiamo da ciò, che un termine qualunque della progressione geometrica, avrà sempre per corrispondente nella progressione aritmetica un termine, il quale conterrà la ragione di questa tante volte, quante volte la ragione della prima è fattore nel termine qualunque di cui si tratta.

224. Dunque, *se si moltiplicano l' uno per l' altro due termini d' una progressione geo-*

metrica, e se si sommino nello stesso tempo li due termini corrispondenti della progressione aritmetica, il prodotto e la somma saranno due termini, li quali corrisponderanno in queste progressioni.

Perciocchè egli è chiaro, che la ragione sarà fattore nel prodotto, quanto l'è sì in uno de' termini moltiplicati, che nell' altro; e che la ragione della progressione aritmetica sarà contenuta nella somma, quanto l'è sì nell' uno de' termini sommati, che nell'altro.

225. Quindi si può, per la sola addizione di due termini della progressione aritmetica, conoscere il prodotto de' due termini corrispondenti della progressione geometrica, supponendo queste due progressioni prolungate sufficientemente.

Per esempio, sommando li due termini 8 e 24, li quali corrispondono a 9 e 729, io ho 32, il quale corrisponde a 6561; donde io conchiudo che il prodotto di 729 per 9 è 6561, com'è in effetto.

226. Dunque, poichè li numeri naturali, li quali compongono la prima colonna della tavola quì sopra, sono stati ricavati da una progressione geometrica, la quale comincia

dall' unità e poichè i loro logaritmi sono li termini corrispondenti d'una progressione aritmetica, la quale comincia da zero; bisogna conchiudere, che *sommando li logaritmi di due numeri, si ha il logaritmo dal prodotto*.

Da ciò è facile di ricavarne gli usi seguenti.

Usi de' logaritmi.

usi de' logaritmi.

227. *Per moltiplicare per logaritmi, bisogna sommare il logaritmo del moltiplicando col logaritmo del moltiplicatore: la somma sarà il logaritmo del prodotto; e quindi cercando questa somma fra i logaritmi delle tavole, si troverà il prodotto a fianco*. Per esempio, se si propone di moltiplicare 14 per 13.

Io trovo nella piccola tavola qui sopra, che
il logaritmo di 14 è   1, 146128
e che quello di 13 è   1, 113943

La somma   2, 260071

Corrisponde nella medesima tavola al numero 182, il quale è in effetto il prodotto.

228. Per quadrare un numero, basta dunque raddoppiare il suo logaritmo, poichè bisognerebbe aggiungere questo logaritmo a se

stesso, per moltiplicare il numero per se stesso.

Per una simile ragione, per cubare un numero, bisognerà render triplo il suo logaritmo; ed in generale, per elevare un numero ad una potenza qualunque, bisognerà prendere il suo logaritmo tante volte, quante sono le unità del numero, che indica questa potenza; cioè moltiplicare il suo logaritmo pel numero, che indica questa potenza: per esempio, per elevare un numero alla settima potenza, bisognerà moltiplicare per 7 il logaritmo di questo numero.

230. Dunque reciprocamente, per estrarre la radice quadrata, cuba, quarta, da un numero proposto, bisogna dividere il logaritmo di questo numero per 2, 3, 4, ec. cioè in generale, pel numero, che indica il grado della radice, che si vuole estrarre.

Per esempio, se si dimanda la radice quadrata di 144, avendo trovato nelle tavole, che il logaritmo di questo numero è 2, 158362, ne prendo la metà 1, 079181; io cerco fra li logaritmi in qual luogo si trova 1, 079181; esso corrisponde a 12, il quale è per conseguenza la radice quadrata di 144.

Se si cerca la radice settima di 128, io

cerco nella tavola, il suo logaritmo, il quale trovo essere 2, 107210; ne prendo la settima parte, o la divido per 7, e cerco a chi corrisponde nella tavola il quoziente 0, 301030; esso corrisponde a 2, il quale è in effetto la radice settima di 128.

231. *Per trovare il quoziente della divisione d'un numero per un altro; bisogna sottrarre il logaritmo del divisore da quello del dividendo; e cercare nella tavola a qual numero corrisponde il logaritmo del residuo; questo numero sarà il quoziente.*

Per esempio, se si vuol dividere 187 per 17, io cerco nella tavola li logaritmi di questi due numeri, e trovo . . . .

il logaritmo di 187 . . . . 2, 271842
quello di . . . . 17 . . . . 1, 230449

La differenza 1, 041393

Corrisponde nella tavola ad 11, il quale è in effetti il quoziente.

Se la divisione non potendosi fare esattamente, il logaritmo rimanente si trovasse in parte nella tavola; noi insegneremo quì appresso, ciò che bisogna fare in questo caso.

La ragione di questa regola è fondata su

di ciò, che il quoziente moltiplicato per lo divisore dovendo riprodurre il dividendo (74), il logaritmo del quoziente aggiunto al logaritmo del divisore, deve dunque comporre il logaritmo del dividendo; e per conseguenza il logaritmo del quoto equivale al logaritmo del dividendo meno quello del divisore.

232. Dopo quello, che abbiamo detto, è facile il vedere, che per trovare una quarta proporzionale co' logaritmi, bisogna sommare li logaritmi del secondo, e terzo termine, e dalla somma sottrarre il logaritmo del primo.

233. Si osservi, che allorchè si cerca nelle tavole un logaritmo risultante da qualche operazione fatta su di altri logaritmi, se si trova a differenza tra l' ultima cifra di questo logaritmo, e quello della tavola, si deve riguardare questa differenza come nulla: perciocchè i logaritmi di tutti li numeri intermedj alla progressione decupla si approssimano di circa una mezza unità decimale del settimo ordine ad un di presso.

De' numeri, i di cui logaritmi non si trovano nelle tavole.

234. Le frazioni, e li numeri interi uniti alle frazioni non hanno i loro logaritmi nelle tavole: lo stesso è delle radici quadrate, cube, e de' numeri, li quali non sono potenze esatte del grado di queste radici.

Se si cerca il logaritmo di un numero intero unito ad una frazione, bisogna prima ridurre il tutto in frazione, (89) ed indi sottrarre il logaritmo del denominatore del logaritmo del nuovo numeratore. Per esempio, per avere il logaritmo di $8\frac{3}{11}$, io cerco quello di $\frac{91}{11}$, il quale lo trovo sottraendo 1, 041393 logaritmo di 11 da 1, 959041 logaritmo di 91, ed il residuo 0, 917648 è il logaritmo di $8\frac{3}{11}$; poichè $8\frac{3}{11}$ o $\frac{91}{11}$ è l'istesso che 91 diviso per 11 (96).

235. La stessa ragione prova, che per avere il logaritmo di una frazione, bisogna sottrarre parimenti il logaritmo del denominatore dal logaritmo del numeratore. Ma come questa sottrazione non può farsi, perchè il logaritmo del denominatore è più grande del logaritmo

del numeratore; si sottrarrà al contrario il logaritmo del numeratore da quello del denominatore; il residuo, il quale dinota quello che bisogna, perchè la sottrazione si possa effettuire, sarà il logaritmo della frazione, applicando a questo residuo un segno, il quale indica che la sottrazione non è stata intieramente fatta. Questo segno è ——, che si pronunzia *meno*. Così il logaritmo del rotto $\frac{11}{91}$ sarà —— 0, 917648 (1).

256. Questo segno è destinato a ricordare nel calcolo, che li logaritmi delle frazioni devono essere impiegati con una regola contraria a quella, che abbiamo prescritta per li logaritmi de' numeri interi, o de' numeri interi uniti a frazioni; cioè, che se si deve moltiplicare per una frazione, bisogna sottrarre il logaritmo di questa frazione; ed al contrario, se si deve dividere, fa d' uopo aggiungere il suo logaritmo.

(1) *I numeri preceduti dal segno* —— *si dicono numeri* negativi. *Noi li faremo conoscere più particolarmente nell' Algebra. Intanto facciamo la prevenzione, che è una falsa idea di riguardarli come numeri al di sopra del zero. Non v' ha niente sopra del zero.*

La ragione è, per la moltiplicazione, che moltiplicare per una frazione, è lo stesso che moltiplicare per lo numeratore, e dividere in seguito per lo denominatore: dunque allorchè si operi per logaritmi, si deve aggiungere il logaritmo del numeratore, e sottrarre indi quello del denominatore; o, ciò che è lo stesso, si deve solamente sottrarre l'eccesso del logaritmo del denominatore sul logaritmo del numeratore. Or questo eccesso è precisamente il logaritmo della frazione.

Riguardo alla divisione, la ragione è del pari facile a comprendersi; in fatti, dividere per $\frac{3}{4}$, per esempio, è lo stesso (109) che moltiplicare per $\frac{4}{3}$, dunque, operando per logaritmi, bisogna aggiungere il logaritmo d $\frac{3}{4}$, cioè (234) la differenza del logaritmo di 4 dal logaritmo di 3, o del logaritmo del denominatore della frazione proposta al logaritmo del suo numeratore.

237. Può accadere, ed accade sovente, che riducendo in una sola frazione l'intero, e la frazione di cui si cerca il logaritmo, che il numeratore sia un numero il quale passi i limiti delle tavole; per esempio, se si cerca il logaritmo di $53 \frac{821}{5470}$, questo numero ridotto in frazione, si riduce a $\frac{303133}{5704}$, di cui

il numeratore passa i limiti delle tavole le più estese.

E' dunque opportuno di sapere come si possa trovare il logaritmo d'un numero, che oltrepassi questi limiti.

Il metodo, che noi daremo, non è rigoroso; ma esso è più che sufficiente per gli usi ordinarj. Prima di esporlo osserviamo;

238. 1.° Che aggiungendo 1, 2, 3 unità alla caratteristica del logaritmo d'un numero, si moltiplica questo numero per 10, 100, 1000 ec., poichè è aggiungerle al logaritmo di 10, o di 100, o di 1000 (219 e 227)

2.° Al contrario, se si sottraggono 1, 2, 3 unità dalla caratteristica d'un logaritmo, è lo stesso che dividere il numero corrispondente per 10, 100, 1000 ec.

Ciò posto, si tratta, per esempio, di trovare il logaritmo di 357859.

Io separerò con una virgola sulla dritta di questo numero tante cifre, quante bastino, perchè il residuo possa trovarsi nelle tavole (*).

(*) *Noi sopponiamo quì che si abbiano fra le mani le tavole ordinarie de' logaritmi. Si troveranno nel trattato di navigazione, il quale fa il sesto volume di questo corso.*

Quì, per esempio, io ne separerò due, ed avrò 3578, 59, che (28) è 100 volte più piccolo del numero proposto 357859.

Io cerco nelle tavole il logaritmo di 3578, il quale è 3, 5536403; prendo nello stesso tempo a fianco di questo logaritmo (*) la differenza 1214 tra questo medesimo logaritmo, e quello di 3579; dopo di chè io fo questa proporzione: se per un' unità di differenza tra li due numeri 3579 e 3578, si ha 1214 di differenza tra i loro logaritmi; quanta per 0, 59, differenza tra li due numeri 3578, 59 e 3578, si avrà di differenza tra i loro logaritmi; cioè io cerco il quarto termine d' una proporzione, di cui li tre primi sono

1 : 1214 : : 0, 59 :

questo quarto termine è 716, 26, o semplicemente 716, trascurando li decimali. Aggiungo dunque 716 al logaritmo 3, 553643 di 3578, ed ho 3, 5537119 per logaritmo di 3578, 59: si tratta dunque, per avere quello di 357859, di aggiungere due unità

Quelle del Sig. Rivard, e quelle del fu Sig. le Caille sono esatte, e comode.

(*) *Queste differenze si trovano nelle tavole a canto ai logaritmi medesimi.*

alla caratteristica del logaritmo, che si è trovato; e si avrà 5, 5537119 per lo logaritmo cercato, poichè 357859 è 100 volte più grande di 3578, 59.

Se le cifre, che si debbono separare sulla dritta, fossero tutte de' zeri; dopo di aver trovato nelle tavole il logaritmo della parte, che rimane a sinistra, non si dovrebbe fare altro, che aggiungere tante unità alla caratteristica, quanti zeri si sono separati.

240. Se si tratta del logaritmo d' un numero accompagnato da decimali, si cercherà questo logaritmo, come se il numero proposto non avesse virgola; e dopo di averlo trovato sia immediatamente nelle tavole, sia col metodo insegnato (239), si toglieranno tante unità dalla caratteristica, quanti decimali vi ha nel numero proposto; perchè avendo considerato il numero come se non avesse virgola, cioè come 10, o 100, o 1000, ec: volte più grande di quello che è, si deve ridurre al suo valore con una convenevole diminuzione della sua caratteristica del suo logaritmo (238).

241. Finalmente, se nel numero proposto vi sono de' decimali, si cercherà anche questo numero nelle tavole, come se non vi fos-

se la virgola ; ed avendo preso il logaritmo corrispondente, se li toglieranno tante unità, quanti decimali vi sono in questo medesimo numero, ed al residuo si premetterà il segno — : per esempio per avere il logaritmo di o, o3, io cerco quello di 3, il quale è o, 477121 ; li tolgo due unità, ed applicando al residuo il segno —, ho — 1, 52 2879 per logaritmo di o, o3. In fatti, o, o3 è lo stesso che $\frac{3}{100}$; or per avere il logaritmo di $\frac{3}{100}$, bisogna (235) sottrarre il logaritmo di 3 da quello di 100, ed applicare al residuo il segno —

De' logaritmi, di cui li numeri non si trovano nelle tavole.

242. Questa ricerca non è meno necessaria della precedente. Per esempio, per la divisione, arriva raremente che il quoziente sia un numero intero. Or se si fa l'operazione co' logaritmi, non si troveranno nelle tavole li logaritmi residui, che quando il quoziente sarà un numero intero : vi ha un infinità di altri casi della medesima specie.

243. Proponiamo ora di trovare a qual numero corrisponde un logaritmo proposto ; sia

che esso sorpassi i limiti delle tavole, sia che cada tra li logaritmi delle tavole. Si separeranno dalla caratteristica tante unità, quante bastino, perchè si possano trovare nelle tavole le prime cifre del logaritmo proposto così preparato. Se tutte le cifre si trovano allor nelle tavole, il numero cercato sarà il numero medesimo, che si trova a fianco nelle tavole, ma mettendo in seguito tanti zeri, quante sono le unità tolte alla caratteristica (238).

Per esempio, il logaritmo 7, 2273467 si trova, (dopo di aver tolte tre unità alla caratteristica) corrispondere al numero 16879; io ne conchiudo, che il logaritmo proposto 7, 2273467 corrisponde ad 16879000.

Se nelle tavole si trovano solamente le prime cifre del logaritmo, si dovrà procedere, come nell'esempio seguente.

Per trovare a qual numero appartiene il logaritmo 5, 2432768, io tolgo due unità alla sua caratteristica; allora il logaritmo 3, 2432768, che ho, cade tra i logaritmi 1750, e 1751: il numero, al quale esso corrisponde è dunque 1750, ed una frazione.

Per avere questa frazione, io sottraggo dal logaritmo 3, 2432768 il logaritmo di 1750, ed ho per differenza 2288.

Io prendo anche nelle tavole la differenza 2481 tra li logaritmi di 1750, e 1751, dopo di che io fo la seguente proporzione.

Se 2481 differenza tra li logaritmi di 1751, e 1750.

Corrisponde ad una unità di differenza tra questi numeri.

A qual differenza di numeri deve corrispondere la differenza 2288 tra il mio logaritmo, e quello di 1750?

Io trovo per quarto termine $\frac{2288}{2481}$; così il logaritmo, 3, 2432768 appartiene al numero 1750 $\frac{2288}{2481}$ ad un dipresso, e per conseguenza il logaritmo proposto, il quale appartiene ad un numero 100 volte più grande (238), ha per numero corrispondente 175000 $\frac{228800}{8481}$, cioè 175092 $\frac{48}{2481}$, o riducendo in decimali, esso ha per numero corrispondente 175092, 22.

244. Se il logaritmo proposto cadesse tra que' delle tavole, non si dovrebbe togliere niuna unità alla caratteristica, e per conseguenza niun zero si dovrebbe aggiungere alla fine dell' operazione, che non si facesse altrove della stessa maniera.

245. Ma perchè la proporzione che noi impieghiamo in questo metodo non è rigorosa-

mente esatta (*), e che essa tanto più si accosta alla vera, quando più grandi sono li numeri cercati; se il logaritmo proposto cadesse al di sotto di quello di 1500, bisognerebbe, per maggiore esattezza, aggiungere alla sua caratteristica quante più unità si possono, senza passare però i limiti delle tavole; ed avendo trovato il numero, che si approssima più di corrispondere nelle tavole, si separeranno sulla dritta con una virgola tante cifre, quante unità si sono aggiunte alla caratteristica, il che il più delle volte basterà; ma se si vogliano più decimali, si farà la proporzione come qui sopra (245), e riducendo il quarto termine in decimali, si metteranno questi al seguito di quelli, che si sono già trovati.

Per esempio, se si cerca a qual numero appartiene il logaritmo 0, 5432725; siccome questo logaritmo cade tra quelli di 3 e 4, e

(*) *Questa proporzione suppone, che le differenze de' logaritmi siano proporzinnali alle differenze de' numeri, ciò che non è mai esattamente vero; ma si approssima assai, quando li numeri sono un poco grandi, e ciò basta per gli usi ordinarj.*

che il numero, al quale esso appartiene è per conseguenza molto al di sotto di 1500, io cerco questo logaritmo con tre unità dippiù nella sua caratteristica ; cioè che io cerco 3, 5432725; e trovo che esso cade tra li logaritmi di 3493, e 3494; donde conchiudo, che il numero cercato è 3, 493 con un millesimo di meno circa.

Ma se questa approssimazione non basta, io prenderò la differenza tra il mio logaritmo e quello di 3493, cioè 739; io prenderò similmente la differenza 1243 tra li logaritmi di 3494 e 3493, e cercherò ragionando come sopra, il quarto proporzionale dopo questi termini . . . .

1243 : 1 : : 739 :

Questo quarto termine valutato in decimali, è 0, 594; dunque il numero cercato è 3, 493594.

Del resto questa seconda approssimazione è limitata, perchè li logaritmi delle tavole non essendo esatti che di circa una mezza unità decimale del settimo ordine ad un dipresso, le differenze sono affette da questo leggiero difetto: ma si può sempre spingere l'approssimazione con sicurezza sino a tre decimali: del

dippiù egli è raro che si abbia bisogno di andare sin là. L'osservazione che noi facciamo, dee dirigerci anche nell'uso, che abbiamo fatto qui sopra (239 e 243) della medesima proporzione,

246. Se si volesse la frazione, alla quale corrisponda un dato logaritmo negativo, si sottrarrà questo logaritmo da 1, o 2, o 3, o 4 ec. unità, secondo l'estensione delle tavole; e dopo di aver trovato il numero, che corrisponde al logaritmo rimanente, si separeranno sulla dritta con una virgola tante cifre, quante unità sono nel numero, da cui si sarà sottratto questo logaritmo.

Per esempio, se si dimanda a qual frazione appartiene — 1, 532732, io sottraggo, 1, 532732 da 4, e rimane 2, 467268, il quale nelle tavole si trova tra li logaritmi di 293, e di 294: io ne conchiudo, che la frazione cercata è tra 0, 0294, e 0, 0293; cioè, che essa è 0, 0293 con una diecimillesima di meno circa. In fatti, sottraendo da 4 il logaritmo proposto 1, 1 532732, è lo stesso (236) che moltiplicare 10000 per la frazione, alla quale appartiene questo medesimo logaritmo proposto, o (ciò che è la stessa cosa) è mol-

tiplicare questa frazione per 10000. Dunque il numero, che si trova, è 10000 volte più grande, e bisogna contarlo come parti dieci millesime.

Quanto si è detto avrà estese applicazioni in seguito. Limitiamoci al presente a dare un' idea, con alcuni esempj, de' vantaggi che i logaritmi procurano per la facilità, e speditezza de' calcoli.

ESEMPIO I.

Si cerca il quoziente di 17954 diviso per 12836, approssimato sino a meno di una diecimillesima circa.

Logaritmo di 17954 . . . . . . 4, 254161
Logaritmo di 12836 . . . . . . 4, 108430

residuo 0, 145731

Questo residuo, cercato nelle tavole con una caratteristica più grande di quattro unità, corrisponde a 13987; dunque (258) il quoziente cercato è 1, 3987.

ESEMPIO II.

Si dimanda la radice cuba di 53 con un millesimo di meno circa.

Il logaritmo di 53 è 1, 724276

Il suo terzo (230) è 0, 574759

Quest' ultimo cercato nelle tavole con una caratteristica più grande di tre unità, corrisponde a 3756; dunque la radice cercata (238) è 3, 756.

Per giudicare del vantaggio de' logaritmi, si deve cercare questa radice col metodo dato (156). Non bisogna per questo riguardare quest' ultima come inutile; poichè essa si estende ad infiniti numeri, a i quali li logaritmi non arriverebbero, per rapporto a i limiti delle tavole.

ESEMPIO III.

Si cerca con un centesimo di meno circa, la radice quinta del cubo di 5736?

Si prenda il triplo del logaritmo 3, 758609 di 5736. Prendendo il quinto di quest' ultimo logaritmo, si ha 2, 255165 per logaritmo, della radice quinta del cuba 5736. Questo loga-

ritmo, cercato nelle tavole, con una caratteristica più grande di due unità, per avere delle centesime, corrisponde tra li numeri 17996, e 17995 la radice cercata è dunque 179, 95 con un centesimo di meno circa.

ESEMPIO IV.

Si tratta di trovare quattro medie proporzionali geometriche tra $2\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$?

Bisognerebbe (215) dividere $5\frac{3}{4}$ per $2\frac{2}{3}$, per avere la ragione, che deve regnare nella progressione, ed estrarre la radice quinta dal quoziente.

Per mezzo de' logaritmi questa operazione è semplicissima. Io determino colle tavole il logaritmo di $5\frac{3}{4}$ o di $\frac{23}{4}$; questo è, o 759668.

Determino similmente il logaritmo di $2\frac{2}{3}$; questo è o, 425969. Sottraggo dunque (231) questo logaritmo dal primo, ed ho, o, 333699; prendendo dunque (230) il quinto di quest'ultimo, ho o, 066740 per logaritmo della ragione cercata. Questo logaritmo cercato nelle tavole con una caratteristica più grande di 4 unità, per avere quattro decimali, corrispon-

de a 11661 , con una diecimillesima di meno circa . Si tratta dunque , per avere li medj proporzionali , di moltiplicare il primo termine $2\frac{2}{3}$ per 1 , 1661 , indi il prodotto per 1 , 1661 , e così di seguito .

Ma queste operazioni possono farsi più prontamente coll' ajuto de' logaritmi , aggiungendo consecutivamente al logaritmo 0, 04259 69 del primo termine $2\frac{2}{3}$ il logaritmo 0 , 0 66740 della ragione , il suo doppio , il triplo, ed il quadruplo ; di sortecchè si avranno 0, 492709 , 0559449 ; 0 , 626189 , 0 , 692929 per li logaritmi delle quattro medie proporzionali cercate . E se si cercano questi quattro logaritmi nelle tavole , con tre unità di più alla caratteristica , si trova , che queste medie proporzionale sono 3, 109 ; 3 , 626 ; 4, 228 ; 4 , 931

Osservazione.

Quando in una operazione , dove si fa uso de' logaritmi, se ne trovano alcuni , che si debbono sottrarre , si può semplificare l'operazione , per l' osservazione seguente .

Allorchè si deve sottrarre un numero qua-

lunque da un altro, il quale è l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre del primo, l'operazione si riduce a scrivere la differenza tra 9 e ciascuna delle cifre del numero proposto, ad eccezione dell'ultima, per la quale si scrive la differenza tra 10 e questa cifra. Per esempio, se ho 526927 da sottrarre da 1000000; io sottraggo successivamente le cifre 5, 2, 6, 9, 2 da 9; e l'ultima cifra la sottraggo da 10, ed ho per residuo 473073.

Questo residuo si chiama il *complemento Aritmetico* del numero proposto.

La sottrazione fatta di questa maniera essendo molto semplice, per poter esser contata per un'operazione, ne segue che quando si dovrà formare un risultato dell'addizione, e sottrazione di molti numeri, si potrà sempre ridurre l'operazione all'addizione. Per esempio, se si tratta di sommare li due numeri 672736, 426452, e di sottrarre dalla loro somma li due numeri 432752, 18675: cosa che esige due addizioni, ed una sottrazione; io sostituisco a questa operazione la seguente:

672736
426452
Complemento Aritmetico di 432752 ... 567248
Complemento Aritmetico di 18675 ... 981325

Somma 2647761

Cioè, che sommo li due primi numeri proposti, e li complimenti aritmetici de' due ultimi; la somma è 2647761. Bisogna sopprimere la prima cifra 2, e le cifre rimanenti 647761 saranno il risultato cercato.

La ragione di questa operazione è facile a capirsi, osservando che in vece di sottrarre 432752, come si proponeva, vi unisco il suo complemento aritmetico, cioè, 1000000 meno 432752, fo nel medesimo tempo la sottrazione proposta, ed un aumento di 1000000, cioè, d'una decina alla prima cifra del risultato; dunque per ciascun complimento aritmetico, che avrò introdotto, avrò una decina di più riguardo alla prima cifra del risultato.

L'applicazione di questo a i logaritmi è evidente.

Si tratta, per esempio, di dividere 3760 per 79. Bisognerebbe sottrarre il logaritmo di 79 da quello di 2760.

In vece di questa operazione, io scrivo . . .

Log. 3760	3, 575188
Compl. Arit. di Log. di 79	8, 102373
Somma . . .	1, 677561

Così 1, 677561 è il logaritmo del quoziente, e corrisponde a 47, 59 con un centesimo di meno circa.

Supponiamo, per secondo esempio, che si cerchi di moltiplicare $\frac{675}{527}$ per $\frac{952}{377}$; bisognerà (106) moltiplicare 675 per 952, e 527 per 377; indi dividere il primo prodotto per lo secondo. Per logaritmi si opera così . . .

Log. 675.	2, 829304
Log. 952.	4, 978637
Compl. Arit. di Log. di 527	7, 287189
Compl. Arit. di Log. di 377. . . .	7, 423659
Somma . . .	20, 518789

il logaritmo del prodotto è dunque 0, 509 789, il quale cercato con tre unità di più alla caratteristica, corrisponde a 3, 234,

Si può fare uso del complemento aritmetico, per mettere li logaritmi delle frazioni sotto la medesima forma di quelli de' numeri interi, ed impiegarlo dell' istessa maniera nel calcolo: con ciò si eviterà la distinzione de' logaritmi negativi, e de' logaritmi positivi. Basterà ricordarsi, che la caratteristica del logaritmo delle frazioni, propriamente detta, è più grande di dieci unità.

Per esempio, per avere il logaritmo di $\frac{3}{4}$, il quale esprime 3 diviso per 4 (96), invece di sottrarre il logaritmo di 4 da quello di 3, e di dare al residuo il segno —, (235); al logaritmo di 3 si aggiunga il complemento aritmetico del logaritmo di 4.

Log. 3.	0, 477121
Compl. Arit. di Log. 4.	9, 397940
Somma	9, 875061

Questa somma è il logaritmo di $\frac{3}{4}$, di cui la caratteristica è più grande di 10 unità. Or non è necessario di fare attualmente la diminuzione; si può rapportarla alla fine delle operazioni, nelle quali s' impiegherà questo logaritmo.

La stessa regola si applica alle frazioni decimali: così per avere il logaritmo di o , 575, il quale è $\frac{575}{1000}$, al logaritmo di 575 , io aggiungerò il complemento aritmetico di 1000.

Impiegando così il complemento aritmetico, invece de' logaritmi negativi delle frazioni, non è più difficile il trovare nelle tavole li valori in decimali di queste medesime frazioni. Tostocchè io saprò che un logaritmo proposto è, o racchiude uno , o molti complimenti aritmetici, io so che la sua caratteristica è più grande di tante decine , quante ve ne sono nel complemento aritmetico: così se essa passa questo numero di decine, sarà facile di diminuirlo, e di trovare il numero , al quale appartiene questo logaritmo, e che sarà un numero intiero unito ad una frazione.

Ma se la caratteristica è al di sotto del numero delle decine, che essa è stimata contenere di più; essa appartiene certamente ad una frazione, la quale io troverò in questa maniera. Cercherò, per ciò che è stato detto, (242, e seg.) a qual numero corrisponde il logaritmo proposto; ed allorchè l'avrò trovato, ne separerò con una virgola tante decine di cifre sulla dritta, quante decine di soverchio vi saranno nella caratteristica.

Nelle elevazioni a potenze bisogna osservare, che moltiplicando (229) il logaritmo per lo numero, che indica il grado della potenza, avverrà che si moltiplicheranno anche quelli, la di cui caratteristica si troverà un poco troppo grande. Così, nell' innalzamento a cubo, per esempio; se vi entra un complemento aritmetico nel logaritmo proposto, cioè se la caratteristica è più grande di 10 unità, quella del logaritmo del cubo sarà più grande di 30 unità; e così delle altre. Sarà dunque facile di portarlo al suo giusto valore.

Nelle estrazioni delle radici, per evitare ogni errore, allorchè entreranno de' complementi aritmetici ne' logaritmi, di cui si farà uso, si avrà cura di aggiungere, o togliere dalla caratteristica tante decine, quante bastini perchè l' eccesso contenga precisamente tante decine, quante unità sono nel grado della radice: ed avendo, secondo la regola ordinaria, diviso pel numero, che indica il grado della radice, la caratteristica sarà troppo grande, e precisamente di 10 unità.

Per esempio, se si cerca la radice cuba di $\frac{276}{547}$; al logaritmo di 276 aggiungo il complemento aritmetico di quello di 547.

Log. 276. . . . . 2, 440909
Comp. Arit. di log. di 547 . . . 7, 262013

Somma 9, 702922
alla caratteristica della quale.
aggiungo 20
29, 702922

affin ch'essa divenga più grande di tre decine, ed ho 29, 702922, di cui il terzo 9, 900974 è il logaritmo della radice cuba cercata; ma di dieci unità di più nella caratteristica: così uniformemente a quello, che è stato osservato quì sopra, io trovo, che questa radice cuba è 0, 7961 con una millesima di meno circa.

L'uso de' complementi aritmetici è principalmente utile ne' calcoli della Trigonometria, e per conseguenza in molte operazioni del Pilotaggio, le quali si vogliano fare con una certa esattezza.

F I N E

pagina	*rigo*	*ERRORI*	*CORREZIONI*
2	16	3	5
19		72, 597	72, 957
		209, 777	209, 787
32	9	ai	a
36	13	sicccme	siccome
37	1	a	di
40	1	darebber	darebbe
41		uel	nel
43		rigoreso	rigoroso
44	12	fatto	fatta
47		propeniamo	proponiamo
18		cosnaja	centinaja
52	14	sapere	sapersi
57	11	Riquardo	Riguardo
66		metcdo	metodo
67	7	933	932
76	17	piccole	piccolo
78	8	quoziento	quoziente
80	4	divide	divido
88	20	dnnque	dunque
90	21	Rignardo	Riguardo
91		qnattro	quattro
96		qnando	quando
100	1	pnò	può
118		libra	libbra
113	10	da'	de'
150	21	por	per
157	26	2 - 72	$\frac{2 \cdot 872}{5}$
166		i cubo	il cubo
180		qnesto	questo
226		prelevare	toglier prima

ERRORI			CORREZIONI
pagina	*rigo*		
225	25	tratteremo	tratterremo
226		pnuti	punti
228		per te stesso	per se stesso
241	1	Segueper	Segue per
246	16	trova a	trova la
250		sopponiamo	supponiamo
254	6	allor	allora
120	6	precederà	procederà